CentraleSupélec

Statistique et apprentissage

Chargés de cours (ordre alphabétique) :

Julien Bect, Gilles Faÿ, Ziad Kobeissi, Laurent Le Brusquet,
Vincent Lescarret, Arshak Minasyan, Arthur Tenenhaus† & Xujia Zhu

† Coordinateur du cours

Cours 4/9

Tests d'hypothèses

Objectifs du cours 4

- prendre une décision en posant un test d'hypothèse
- choisir et construire un test d'hypothèse
- définir et calculer les risques de première et deuxième espèce

Plan du cours

Plan du cours

Plan du cours

Exemple « Fiabilité composant »

Rappel : $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(\theta),\ \theta > 0.$

Problème posé

Le fabricant souhaite proposer à ses clients une garantie d'un an.

➠ Est-ce pertinent ?

Reformuler la question

Il estime qu'une garantie est envisageable si :

$$\text{le taux de retour des composants est inférieur à } 10\%$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbb{P}_\theta\left(X_1 \leq 1\right) = 1 - \exp\left(-\theta\right) < 0.1$$
$$\Updownarrow$$
$$\theta < \theta_0 = -\ln(0.9)$$

Exemple « Fiabilité composant »

Rappel : $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(\theta),\ \theta > 0.$

Problème posé

Le fabricant souhaite proposer à ses clients une garantie d'un an.

➠ Est-ce pertinent ?

Reformuler la question

Il estime qu'une garantie est envisageable si :

$$\text{le taux de retour des composants est inférieur à } 10\%$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbb{P}_\theta\left(X_1 \leq 1\right) = 1 - \exp\left(-\theta\right) < 0.1$$
$$\Updownarrow$$
$$\theta < \theta_0 = -\ln(0.9)$$

Exemple « Fiabilité composant »

Le fabricant souhaite donc savoir si $\theta < \theta_0$ ou si $\theta \geq \theta_0$.

➠ hypothèse à tester : $H_0 : \theta \geq \theta_0$
(composants de qualité insuffisante)

Prendre une décision à l'aide des données

On souhaite évaluer la compatibilité entre H_0 et $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$:

- si une forte incompatibilité détectée,
  ➠ on rejettera H_0 (et la garantie sera proposée) ;
- autrement, on acceptera H_0.

Notez le déséquilibre entre les 2 scénarios
(H_0 = scénario conservé par défaut)

Les tests d'hypothèses permettent de formaliser cette prise de décision.

Exemple « Fiabilité composant »

Le fabricant souhaite donc savoir si $\theta < \theta_0$ ou si $\theta \geq \theta_0$.

➠ hypothèse à tester : $H_0 : \theta \geq \theta_0$
(composants de qualité insuffisante)

Prendre une décision à l'aide des données

On souhaite évaluer la compatibilité entre H_0 et $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$:

- si une forte incompatibilité détectée,
  ➠ on rejettera H_0 (et la garantie sera proposée) ;
- autrement, on acceptera H_0.

Notez le déséquilibre entre les 2 scénarios
(H_0 = scénario conservé par défaut)

Les tests d'hypothèses permettent de formaliser cette prise de décision.

Autre exemple / construction d'un premier test

Objectif : tester le paramètre de moyenne d'une loi gaussienne.

- $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\theta, \sigma_0^2)$ $\qquad$ (σ_0 connu ; $n = 10$, $\sigma_0 = 2.5$)
- hypothèse à tester H_0 : $\theta = \theta_0$ (fixé),
- hypothèse alternative H_1 : $\theta = \theta_1$ (fixé et tel que $\theta_0 < \theta_1$).

Démarche. Prendre une décision sur H_0, c'est estimer qu'elle est

- soit vraie $\quad$ ➠ $\delta = 0$,
- soit fausse $\quad$ ➠ $\delta = 1$.

Contrainte. Prendre une décision δ tel que si $\theta = \theta_0$ (H_0 vraie),

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(\delta = 1) = 5\% \ (= \alpha).$$

Construction intuitive d'un test : $\delta = \mathbb{1}_{\bar{X} > t}$

- avec t tel que $\mathbb{P}_{\theta_0}(\delta = 1) = \mathbb{P}_{\theta_0}(\bar{X} > t) = 5\%$.

Autre exemple / construction d'un premier test

Objectif : tester le paramètre de moyenne d'une loi gaussienne.

- $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\theta, \sigma_0^2)$ $(\sigma_0$ connu ; $n = 10$, $\sigma_0 = 2.5)$
- hypothèse à tester $H_0 : \theta = \theta_0$ (fixé),
- hypothèse alternative $H_1 : \theta = \theta_1$ (fixé et tel que $\theta_0 < \theta_1$).

Démarche. Prendre une décision sur H_0, c'est estimer qu'elle est

- soit vraie ➠ $\delta = 0$,
- soit fausse ➠ $\delta = 1$.

Contrainte. Prendre une décision δ tel que si $\theta = \theta_0$ (H_0 vraie),

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(\delta = 1) = 5\% \ (= \alpha).$$

Construction intuitive d'un test : $\delta = \mathbb{1}_{\bar{X} > t}$

- avec t tel que $\mathbb{P}_{\theta_0}(\delta = 1) = \mathbb{P}_{\theta_0}(\bar{X} > t) = 5\%$.

Autre exemple / construction d'un premier test

Objectif : tester le paramètre de moyenne d'une loi gaussienne.

- $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\theta, \sigma_0^2)$ (σ_0 connu ; $n = 10$, $\sigma_0 = 2.5$)
- hypothèse à tester $H_0 : \theta = \theta_0$ (fixé),
- hypothèse alternative $H_1 : \theta = \theta_1$ (fixé et tel que $\theta_0 < \theta_1$).

Démarche. Prendre une décision sur H_0, c'est estimer qu'elle est

- soit vraie ➠ $\delta = 0$,
- soit fausse ➠ $\delta = 1$.

Contrainte. Prendre une décision δ tel que si $\theta = \theta_0$ (H_0 vraie),

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(\delta = 1) = 5\% \; (= \alpha).$$

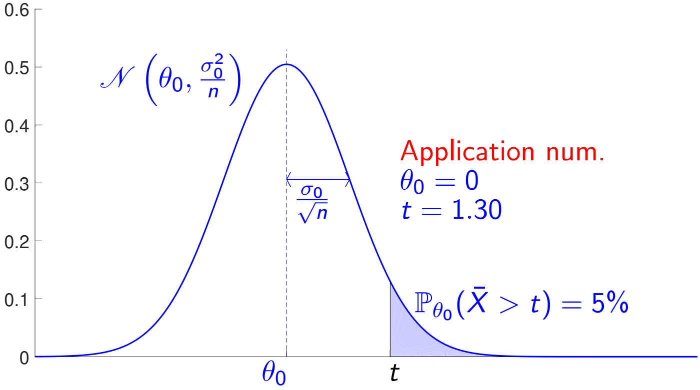
Construction intuitive d'un test : $\delta = \mathbb{1}_{\bar{X} > t}$

- avec t tel que $\mathbb{P}_{\theta_0}(\delta = 1) = \mathbb{P}_{\theta_0}(\bar{X} > t) = 5\%$.

Si H_0 est vraie ($\theta = \theta_0$) : $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\theta_0, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$, et ainsi :

$$t \;=\; \theta_0 + q_{0.95}\,\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

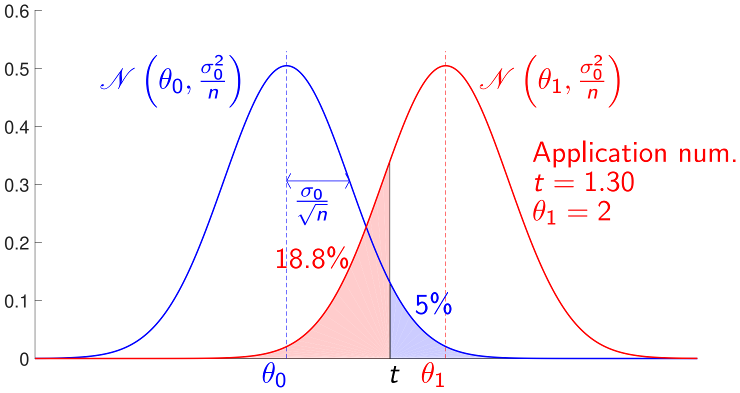
avec q_r quantile d'ordre r de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.



Si H_1 est vraie $(\theta = \theta_1)$: $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\theta_1, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$, et ainsi :

$$\mathbb{P}_{\theta_1}(\delta = 0) = \mathbb{P}_{\theta_1}(\bar{X} \leq t) = \Phi\left(\frac{t-\theta_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)$$

avec Φ fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.



Plan du cours

Poser un test d'hypothèse

Rappel : on a un modèle statistique paramétré par θ :

$$\mathscr{P}^{\underline{X}} = \left\{ \mathbb{P}_{\theta}^{\underline{X}},\ \theta \in \Theta \right\}.$$

Hypothèse statistique

Une hypothèse statistique est représentée par un sous-ensemble de $\mathscr{P}^{\underline{X}}$, et donc par un sous-ensemble de Θ.

Notation. Soit $\Theta_j \subset \Theta$ le sous-ensemble représentant H_j

➠ $H_j : \theta \in \Theta_j$

Test paramétrique / non-paramétrique.
Un test est dit paramétrique si Θ est de dimension finie.

Poser un test d'hypothèse (suite)

Hypothèse nulle

On appelle hypothèse nulle l'hypothèse $H_0 : \theta \in \Theta_0$

- que l'on « veut tester »,
- celle qui sera conservée par défaut si elle n'est pas incohérente avec les données.

Analogie judiciaire : présomption d'innocence

Hypothèse alternative

On appelle hypothèse alternative l'hypothèse $H_1 : \theta \in \Theta_1$

- qui sera choisie si H_0 est rejetée.
- On suppose que $\Theta_1 \cap \Theta_0 = \varnothing$.

Remarque : on peut supposer sans perte de généralité que $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$.

Poser un test d'hypothèse (suite)

Hypothèse nulle

On appelle hypothèse nulle l'hypothèse $H_0 : \theta \in \Theta_0$

- que l'on « veut tester »,
- celle qui sera conservée par défaut si elle n'est pas incohérente avec les données.

Analogie judiciaire : présomption d'innocence

Hypothèse alternative

On appelle hypothèse alternative l'hypothèse $H_1 : \theta \in \Theta_1$

- qui sera choisie si H_0 est rejetée.
- On suppose que $\Theta_1 \cap \Theta_0 = \varnothing$.

Remarque : on peut supposer sans perte de généralité que $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$.

Exemples de tests paramétriques

Exemple 1. Exercice

- $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(\theta)$, avec $\theta \in \Theta = [0, +\infty[$,
- $\Theta_0 = \{\theta \geq \theta_0\}$; $\Theta_1 = \{\theta < \theta_0\}$ avec $\theta_0 > 0$ un seuil fixé.

Exemple 2. Même exemple avec :

- $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ (singleton) ; $\Theta_1 = \{\theta \neq \theta_0\}$,
- ou $\Theta_0 = \{\theta_0\}$; $\Theta_1 = \{\theta < \theta_0\}$.

Définitions : hypothèses simples / composites

On dit qu'une hypothèse H_j est simple quand Θ_j est un singleton.
On dit que H_j est une composite dans le cas contraire.

Exemples de tests paramétriques

Exemple 1. Exercice

- $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(\theta)$, avec $\theta \in \Theta = [0, +\infty[$,
- $\Theta_0 = \{\theta \geq \theta_0\}$; $\Theta_1 = \{\theta < \theta_0\}$ avec $\theta_0 > 0$ un seuil fixé.

Exemple 2. Même exemple avec :

- $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ (singleton) ; $\Theta_1 = \{\theta \neq \theta_0\}$,
- ou $\Theta_0 = \{\theta_0\}$; $\Theta_1 = \{\theta < \theta_0\}$.

Définitions : hypothèses simples / composites

On dit qu'une hypothèse H_j est simple quand Θ_j est un singleton.
On dit que H_j est une composite dans le cas contraire.

Exemples de tests paramétriques

Exemple 1. Exercice

- $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(\theta)$, avec $\theta \in \Theta = [0, +\infty[$,
- $\Theta_0 = \{\theta \geq \theta_0\}$; $\Theta_1 = \{\theta < \theta_0\}$ avec $\theta_0 > 0$ un seuil fixé.

Exemple 2. Même exemple avec :

- $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ (singleton) ; $\Theta_1 = \{\theta \neq \theta_0\}$,
- ou $\Theta_0 = \{\theta_0\}$; $\Theta_1 = \{\theta < \theta_0\}$.

Définitions : hypothèses simples / composites

On dit qu'une hypothèse H_j est simple quand Θ_j est un singleton.
On dit que H_j est une composite dans le cas contraire.

Autres exemples de tests (non-paramétriques)

Tests d'adéquation à une loi ou une famille de lois

- voir section 3

Autres types de tests

- tests pour l'indépendance de deux (groupes de) variables
- tests de la symétrie d'une loi
- ...

Procédure de test

Définition : (procédure de) test

Un test est une statistique $\delta = \delta(\underline{X})$ valeurs dans $\{0, 1\}$:

$$\begin{aligned} \delta : \quad \underline{\mathcal{X}} &\mapsto \{0,1\}, \\ \underline{x} &\rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } H_0 \text{ est acceptée,} \\ 1 & \text{si elle est rejetée (en faveur de } H_1\text{).} \end{cases} \end{aligned}$$

Définition : zone de rejet d'un test

La zone de rejet $\mathscr{R}_\delta$ d'un test δ est

$$\mathscr{R}_\delta = \{ \underline{x} \in \underline{\mathcal{X}} \text{ tel que } \delta(\underline{x}) = 1 \}.$$

Procédure de test

Définition : (procédure de) test

Un test est une statistique $\delta = \delta(\underline{X})$ valeurs dans $\{0, 1\}$:

$$\begin{aligned} \delta : \quad \underline{\mathcal{X}} \quad &\mapsto \quad \{0,1\}, \\ \underline{x} \quad &\to \quad \begin{cases} 0 & \text{si } H_0 \text{ est acceptée,} \\ 1 & \text{si elle est rejetée (en faveur de } H_1\text{).} \end{cases} \end{aligned}$$

Définition : zone de rejet d'un test

La zone de rejet $\mathscr{R}_\delta$ d'un test δ est

$$\mathscr{R}_\delta \; = \; \{\, \underline{x} \in \underline{\mathcal{X}} \;\text{ tel que }\; \delta(\underline{x}) = 1 \,\}\,.$$

Quantifier les risques d'erreur

Définition : risque (d'erreur) de première espèce

On appelle risque de première espèce la probabilité de l'erreur consistant à rejeter H_0 à tort :

$$\mathbb{P}_\theta(\delta = 1) \;=\; \mathbb{E}_\theta(\delta), \qquad \theta \in \Theta_0.$$

(⚠ Ce risque dépend de la valeur de θ, pour $\theta \in \Theta_0$.)

Définition : risque (d'erreur) de deuxième espèce

On appelle risque de deuxième espèce la probabilité de l'erreur consistant à accepter H_0 à tort :

$$\mathbb{P}_\theta(\delta = 0) = 1 - \mathbb{E}_\theta(\delta), \qquad \theta \in \Theta_1.$$

(Notez le déséquilibre de la terminologie
$\rightarrow$ plus grande importance accordée à H_0.)

Quantifier les risques d'erreur

Définition : risque (d'erreur) de première espèce

On appelle risque de première espèce la probabilité de l'erreur consistant à rejeter H_0 à tort :

$$\mathbb{P}_\theta(\delta = 1) \; = \; \mathbb{E}_\theta(\delta), \qquad \theta \in \Theta_0.$$

(⚠ Ce risque dépend de la valeur de θ, pour $\theta \in \Theta_0$.)

Définition : risque (d'erreur) de deuxième espèce

On appelle risque de deuxième espèce la probabilité de l'erreur consistant à accepter H_0 à tort :

$$\mathbb{P}_\theta(\delta = 0) = 1 - \mathbb{E}_\theta(\delta), \qquad \theta \in \Theta_1.$$

(Notez le déséquilibre de la terminologie
$\rightarrow$ plus grande importance accordée à H_0.)

Définition : puissance d'un test

On appelle puissance la proba. de rejeter H_0 lorsqu'elle est fausse :

$$\mathbb{P}_\theta(\delta = 1) = \mathbb{E}_\theta(\delta), \qquad \theta \in \Theta_1.$$

Remarque : égale à « 1 - risque de deuxième espèce ».

Approche usuelle† pour la construction d'un test.
Soit $0 < \alpha < 1$ un niveau de risque. On va chercher un test δ t.q.

- $\forall \theta \in \Theta_0,\ \mathbb{P}_\theta(\delta = 1) \leq \alpha$;
  ➠ contrôle du risque de première espèce.

  On dit que le test δ est de niveau (au plus) α.
- $\forall \theta \in \Theta_1,\ \mathbb{P}_\theta(\delta = 1)$ « le plus grand possible » ;
  ➠ capacité à remettre en cause H_0 lorsqu'elle est fausse.

Valeurs typiques : $\alpha = 5\%,\ 1\%,\ 1‰\ldots$

† « de Neyman »

Définition : puissance d'un test

On appelle puissance la proba. de rejeter H_0 lorsqu'elle est fausse :

$$\mathbb{P}_\theta(\delta = 1) = \mathbb{E}_\theta(\delta), \qquad \theta \in \Theta_1.$$

Remarque : égale à « 1 - risque de deuxième espèce ».

Approche usuelle† pour la construction d'un test.
Soit $0 < \alpha < 1$ un niveau de risque. On va chercher un test δ t.q.

- $\forall \theta \in \Theta_0$, $\mathbb{P}_\theta(\delta = 1) \leq \alpha$;
  ➠ contrôle du risque de première espèce.

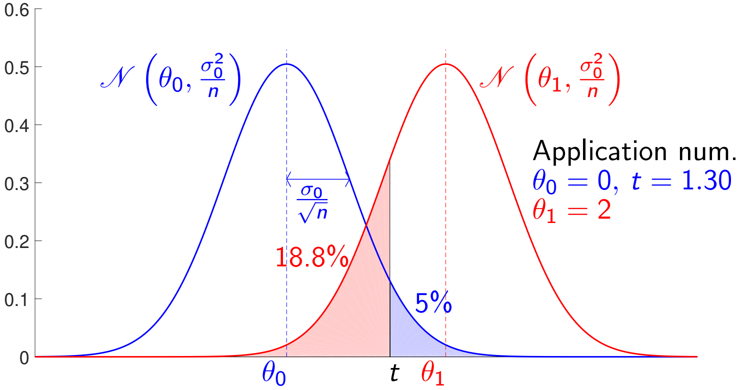
  On dit que le test δ est de niveau (au plus) α.
- $\forall \theta \in \Theta_1$, $\mathbb{P}_\theta(\delta = 1)$ « le plus grand possible » ;
  ➠ capacité à remettre en cause H_0 lorsqu'elle est fausse.

Valeurs typiques : $\alpha = 5\%, 1\%, 1‰\dots$

† « de Neyman »

Retour sur l'exemple introductif

- risque de première espèce : aire de la zone bleue,
- risque de deuxième espèce : aire de la zone rouge.



Densité de probabilité de $\bar{X}$ sous H_0 et H_1

Définition : taille d'un test

On dit que δ est de niveau *exactement* α, ou de taille α, si

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta (\delta = 1) = \alpha.$$

Définition : comparaison de deux tests

Soient δ et δ' deux tests de niveau (au plus) α. On dit que δ' est uniformément plus puissant que δ si

$$\forall \theta \in \Theta_1, \quad \mathbb{P}_\theta (\delta' = 1) \geq \mathbb{P}_\theta (\delta = 1).$$

(Certains auteurs demandent une inégalité stricte en un ou tous les $\theta \in \Theta_1$.)

Remarques :

- il s'agit d'un ordre partiel sur les fonctions puissance,
- lorsque c'est possible, on cherchera le test uniformément le plus puissant (UPP) au niveau α (c'est-à-dire un test de niveau α, uniformément plus puissant que tout autre test de niveau α).

Définition : taille d'un test

On dit que δ est de niveau *exactement* α, ou de taille α, si

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta (\delta = 1) = \alpha.$$

Définition : comparaison de deux tests

Soient δ et δ' deux tests de niveau (au plus) α. On dit que δ' est uniformément plus puissant que δ si

$$\forall \theta \in \Theta_1, \quad \mathbb{P}_\theta \left(\delta' = 1\right) \ \geq \ \mathbb{P}_\theta (\delta = 1) \, .$$

(Certains auteurs demandent une inégalité stricte en un ou tous les $\theta \in \Theta_1$.)

Remarques :

- il s'agit d'un ordre partiel sur les fonctions puissance,
- lorsque c'est possible, on cherchera le test uniformément le plus puissant (UPP) au niveau α (c'est-à-dire un test de niveau α, uniformément plus puissant que tout autre test de niveau α).

Plan du cours

Plan du cours

Test du rapport de vraisemblance

Supposons deux hypothèses simples : $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ et $\Theta_1 = \{\theta_1\}$.

On note $\mathcal{L} : (\theta, \underline{x}) \mapsto \mathcal{L}(\theta, \underline{x})$ la fonction de vraisemblance†.

Définition : test du rapport de vraisemblance

On appelle test du rapport de vraisemblance (RV) le test

$$\delta^{\mathrm{RV}} = \begin{cases} 1 & \text{si } T^{\mathrm{RV}} > c, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

construit à partir de la statistique du rapport de vraisemblance :

$$T^{\mathrm{RV}} = \frac{\mathcal{L}(\theta_1, \underline{X})}{\mathcal{L}(\theta_0, \underline{X})}.$$

† On peut montrer que la famille finie $\left\{\mathbb{P}^X_{\theta_0}, \mathbb{P}^X_{\theta_1}\right\}$ est toujours dominée (Radon-Nikodym).

Test du rapport de vraisemblance

Supposons deux hypothèses simples : $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ et $\Theta_1 = \{\theta_1\}$.

On note $\mathcal{L} : (\theta, \underline{x}) \mapsto \mathcal{L}(\theta, \underline{x})$ la fonction de vraisemblance†.

Définition : test du rapport de vraisemblance

On appelle test du rapport de vraisemblance (RV) le test

$$\delta^{\mathrm{RV}} = \begin{cases} 1 & \text{si } T^{\mathrm{RV}} > c, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

construit à partir de la statistique du rapport de vraisemblance :

$$T^{\mathrm{RV}} = \frac{\mathcal{L}(\theta_1, \underline{X})}{\mathcal{L}(\theta_0, \underline{X})}.$$

† On peut montrer que la famille finie $\left\{\mathbb{P}^{X}_{\theta_{\mathbf{0}}}, \mathbb{P}^{X}_{\theta_{\mathbf{1}}}\right\}$ est toujours dominée (Radon-Nikodym).

Résultat fondamental

Soit $\alpha \in]0, 1[$.

Théorème : « lemme » de Neyman-Pearson

Supposons qu'il existe[⊛] un seuil $c = c_\alpha$ tel que

- le test du RV associé δ^{RV} soit de niveau exactement α (de taille α).

Alors δ^{RV} est le test le plus puissant[†] au niveau α :

- pour tout test $\tilde{\delta}$ de niveau (au plus) α, δ^{RV} est plus puissant que $\tilde{\delta}$.

➠ Le test du RV est optimal dans cette situation.

⊛ Toujours vrai si la fonction de repartition de T^{RV} est continue.

† Inutile de préciser « uniformément » puisque H_1 est simple.

Résultat fondamental

Soit $\alpha \in]0,1[$.

Théorème : « lemme » de Neyman-Pearson

Supposons qu'il existe[⊛] un seuil $c = c_\alpha$ tel que

- le test du RV associé δ^{RV} soit de niveau exactement α (de taille α).

Alors δ^{RV} est le test le plus puissant[†] au niveau α :

- pour tout test $\tilde{\delta}$ de niveau (au plus) α,
  δ^{RV} est plus puissant que $\tilde{\delta}$.

➠ Le test du RV est optimal dans cette situation.

[⊛] Toujours vrai si la fonction de repartition de T^{RV} est continue.

[†] Inutile de préciser « uniformément » puisque H_1 est simple.

Retour sur l'exemple gaussien

Rapport de vraisemblance :

$$T^{\mathrm{RV}} = \frac{\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_0)^n}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\theta_1)^2}{2\sigma_0^2}\right)}{\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_0)^n}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\theta_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)}$$

$$= \exp\left(-\frac{n\left(\theta_1^2-\theta_0^2\right)}{2\sigma_0^2}\right)\exp\left(\frac{(\theta_1-\theta_0)}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n X_i\right).$$

Test du RV au niveau α : puisque $\theta_1 > \theta_0$, on a

$$\delta^{\mathrm{RV}} = 1 \iff T^{\mathrm{RV}} > c_\alpha \iff T = \bar{X} > t_\alpha$$

➠ le test construit en introduction est optimal.

Retour sur l'exemple gaussien

Rapport de vraisemblance :

$$
\begin{aligned}
T^{\mathrm{RV}} &= \frac{\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_0)^n}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\theta_1)^2}{2\sigma_0^2}\right)}{\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_0)^n}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\theta_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)} \\
&= \exp\left(-\frac{n\left(\theta_1^2-\theta_0^2\right)}{2\sigma_0^2}\right)\exp\left(\frac{(\theta_1-\theta_0)}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n X_i\right).
\end{aligned}
$$

Test du RV au niveau α : puisque $\theta_1 > \theta_0$, on a

$$
\delta^{\mathrm{RV}} = 1 \iff T^{\mathrm{RV}} > c_\alpha \iff T = \bar{X} > t_\alpha
$$

➠ le test construit en introduction est optimal.

Statistique de test et p-valeur

Le résultat d'un test peut être exprimé à l'aide de sa p-valeur.

Définition : p-valeur

Soit T la statistique de test d'un test de la forme $\delta = \mathbb{1}_{T > t_\alpha}$.

Définition. On appelle p-valeur la statistique

$$\mathrm{pval}(\underline{x}) \;=\; \mathbb{P}_{\theta_0}\left(T(\underline{X}) > T(\underline{x})\right)$$

à valeurs dans $]0,1[$. ⚠ Fonction des observations !

Soit F_0 la FR de T sous H_0. Alors :

$$\mathrm{pval}(\underline{x}) \;=\; 1 - F_0(T(\underline{x})).$$

Statistique de test et p-valeur

Le résultat d'un test peut être exprimé à l'aide de sa p-valeur.

Définition : p-valeur

Soit T la statistique de test d'un test de la forme $\delta = \mathbb{1}_{T > t_\alpha}$.

Définition. On appelle p-valeur la statistique

$$\mathrm{pval}\,(\underline{x}) \;=\; \mathbb{P}_{\theta_0}\left(T(\underline{X}) > T(\underline{x})\right)$$

à valeurs dans $]0, 1[$. ⚠ Fonction des observations !

Soit F_0 la FR de T sous H_0. Alors :

$$\mathrm{pval}(\underline{x}) \;=\; 1 - F_0(T(\underline{x})).$$

Statistique de test et p-valeur

Le résultat d'un test peut être exprimé à l'aide de sa p-valeur.

Définition : p-valeur

Soit T la statistique de test d'un test de la forme $\delta = \mathbb{1}_{T > t_\alpha}$.

Définition. On appelle p-valeur la statistique

$$\mathrm{pval}\,(\underline{x}) \;=\; \mathbb{P}_{\theta_0}\,(T(\underline{X}) > T(\underline{x}))$$

à valeurs dans $]0, 1[$.

⚠ Fonction des observations !

Soit F_0 la FR de T sous H_0. Alors :

$$\mathrm{pval}(\underline{x}) \;=\; 1 - F_0(T(\underline{x})).$$

Interprétation de la p-valeur

Supposons F_0 continue et strictement croissante :

$$\forall \alpha \in]0,1[, \quad \exists! t_\alpha \in \mathbb{R}, \quad \delta = \mathbb{1}_{T > t_\alpha} \text{ est de niveau exactement } \alpha.$$

Proposition

Démonstration

$$H_0 \text{ est rejetée au niveau } \alpha \quad \Leftrightarrow \quad T > t_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{pval} < \alpha.$$

t_α est appelé valeur critique de la statistique de test T.

Interprétation : p-valeur = mesure de la présomption contre H_0

p-valeur	présomption contre H_0
$\mathrm{pval} < 0.01$	très forte présomption
$0.01 \leq \mathrm{pval} < 0.05$	forte présomption
$0.05 \leq \mathrm{pval} < 0.10$	faible présomption
$0.1 < \mathrm{pval}$	aucune présomption

Interprétation de la p-valeur

Supposons F_0 continue et strictement croissante :

$$\forall \alpha \in]0,1[, \quad \exists! t_\alpha \in \mathbb{R}, \quad \delta = \mathbb{1}_{T > t_\alpha} \text{ est de niveau exactement } \alpha.$$

Proposition Démonstration

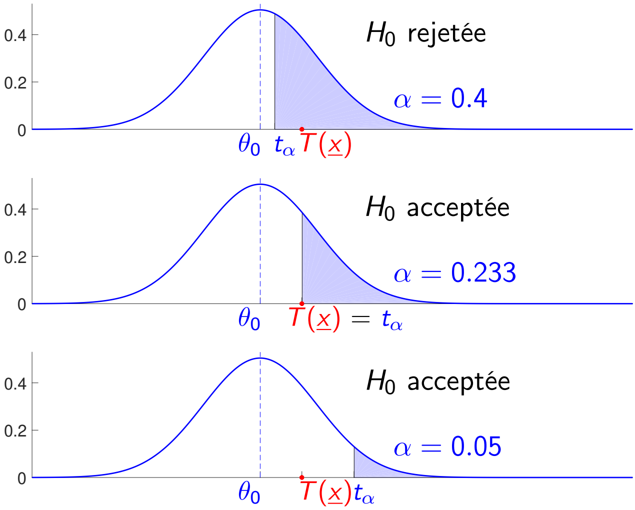
$$H_0 \text{ est rejetée au niveau } \alpha \quad \Leftrightarrow \quad T > t_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{pval} < \alpha.$$

t_α est appelé valeur critique de la statistique de test T.

Interprétation : p-valeur = mesure de la présomption contre H_0

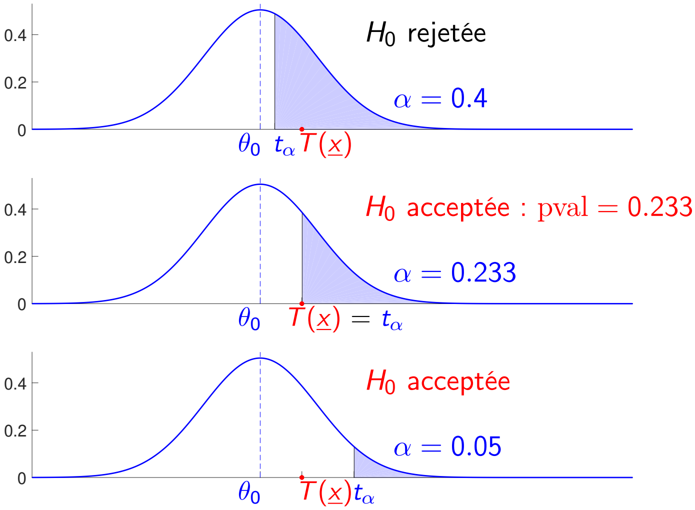
p-valeur	présomption contre H_0
$\mathrm{pval} < 0.01$	très forte présomption
$0.01 \leq \mathrm{pval} < 0.05$	forte présomption
$0.05 \leq \mathrm{pval} < 0.10$	faible présomption
$0.1 < \mathrm{pval}$	aucune présomption

Retour sur l'exemple gaussien, où $T(\underline{X}) = \bar{X}$



pval est le plus grand niveau α auquel on accepte H_0.

Retour sur l'exemple gaussien, où $T(\underline{X}) = \bar{X}$



pval est le plus grand niveau α auquel on accepte H_0.

Plan du cours

Exemples de tests avec des hypothèses composites

Hypothèse nulle simple / alternative composite

- $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ / $\Theta_1 = \{\theta > \theta_0\}$ (test unilatéral),
- $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ / $\Theta_1 = \{\theta \neq \theta_0\}$ (test bilatéral),
- ...

Hypothèse nulle composite / alternative composite

- $\Theta_0 = \{\theta \leq \theta_0\}$ / $\Theta_1 = \{\theta > \theta_0\}$ (test unilatéral),
- $\Theta_0 = \{\mu = \mu_0\}$ / $\Theta_1 = \{\mu = \mu_1\}$,
  où $\theta = (\mu, \sigma^2)$ avec σ^2 inconnu (paramètre de nuisance),
- $\Theta_0 = \{\theta^{(1)} = \theta^{(2)}\}$ / $\Theta_1 = \{\theta^{(1)} \neq \theta^{(2)}\}$,
  où $\theta \in \Theta = \mathbb{R}^2$ (égalité entre deux paramètres),
- ...

Exemples de tests avec des hypothèses composites

Hypothèse nulle simple / alternative composite

- $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ / $\Theta_1 = \{\theta > \theta_0\}$ (test unilatéral),
- $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ / $\Theta_1 = \{\theta \neq \theta_0\}$ (test bilatéral),
- ...

Hypothèse nulle composite / alternative composite

- $\Theta_0 = \{\theta \leq \theta_0\}$ / $\Theta_1 = \{\theta > \theta_0\}$ (test unilatéral),
- $\Theta_0 = \{\mu = \mu_0\}$ / $\Theta_1 = \{\mu = \mu_1\}$,
  où $\theta = (\mu, \sigma^2)$ avec σ^2 inconnu (paramètre de nuisance),
- $\Theta_0 = \{\theta^{(1)} = \theta^{(2)}\}$ / $\Theta_1 = \{\theta^{(1)} \neq \theta^{(2)}\}$,
  où $\theta \in \Theta = \mathbb{R}^2$ (égalité entre deux paramètres),
- ...

Différences avec le cas d'hypothèses simples

- Test de niveau (au plus) α, si Θ_0 est composite :

$$\forall \theta \in \Theta_0,\ \mathbb{P}_\theta(\delta = 1) \leq \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta(\delta = 1)}_{\text{taille du test}} \leq \alpha.$$

- Si Θ_1 est composite, la puissance est une fonction de $\theta \in \Theta_1$:

$$\begin{array}{rcl} \Theta_1 & \to & [0,1] \\ \theta & \mapsto & \mathbb{P}_\theta(\delta = 1). \end{array}$$

- p-valeur pour un test de la forme $\delta = \mathbb{1}_{T > t_\alpha}$:

$$\mathrm{pval} = \sup_{\theta \in \Theta_0} (1 - F_\theta(T)).$$

où F_θ est la fonction de répartition de T sous $\mathbb{P}_\theta$.

Différences avec le cas d'hypothèses simples

- Test de niveau (au plus) α, si Θ_0 est composite :

$$\forall \theta \in \Theta_0,\ \mathbb{P}_\theta(\delta = 1) \le \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta(\delta = 1)}_{\text{taille du test}} \le \alpha.$$

- Si Θ_1 est composite, la puissance est une fonction de $\theta \in \Theta_1$:

$$\begin{array}{ccc} \Theta_1 & \rightarrow & [0,1] \\ \theta & \mapsto & \mathbb{P}_\theta(\delta = 1). \end{array}$$

- p-valeur pour un test de la forme $\delta = \mathbb{1}_{T > t_\alpha}$:

$$\text{pval} = \sup_{\theta \in \Theta_0} (1 - F_\theta(T)).$$

où F_θ est la fonction de répartition de T sous $\mathbb{P}_\theta$.

Différences avec le cas d'hypothèses simples

- Test de niveau (au plus) α, si Θ_0 est composite :

$$\forall \theta \in \Theta_0,\ \mathbb{P}_\theta\left(\delta = 1\right) \ \leq \ \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta\left(\delta = 1\right)}_{\text{taille du test}} \ \leq \ \alpha.$$

- Si Θ_1 est composite, la puissance est une fonction de $\theta \in \Theta_1$:

$$\begin{array}{lcl} \Theta_1 & \to & [0, 1] \\ \theta & \mapsto & \mathbb{P}_\theta\left(\delta = 1\right). \end{array}$$

- p-valeur pour un test de la forme $\delta = \mathbb{1}_{T > t_\alpha}$:

$$\text{pval} \ = \ \sup_{\theta \in \Theta_0} \left(1 - F_\theta(T)\right).$$

où F_θ est la fonction de répartition de T sous $\mathbb{P}_\theta$.

Retour sur l'exemple gaussien / test sur la moyenne

- **Test sur hypothèses simples**

$$H_0 : \theta = \theta_0 / H_1 : \theta = \theta_1, \quad \text{avec } \theta_0 < \theta_1$$

- **Rappel du test optimal.**

$$\delta(\underline{X}) = 1 \iff \bar{X} > t_\alpha, \quad \text{avec } t_\alpha = \theta_0 + q_{1-\alpha}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

Par Neyman-Pearson δ est UPP parmi les tests de niveau α.

- **Analyse du test.** δ est identique $\forall \theta_1 > \theta_0$ (δ ne dépend que de α et θ_0) ; donc δ est aussi UPP pour un test de la forme :

$$H_0 : \theta = \theta_0 / H_1 : \theta > \theta_0.$$

On peut montrer que δ **est aussi UPP pour un test de la forme :** $H_0 : \theta \leq \theta_0$ / $H_1 : \theta > \theta_0$

exercice

Retour sur l'exemple gaussien / test sur la moyenne

- **Test sur hypothèses simples**

$$H_0 : \theta = \theta_0 / H_1 : \theta = \theta_1, \quad \text{avec } \theta_0 < \theta_1$$

- **Rappel du test optimal.**

$$\delta(\underline{X}) = 1 \iff \bar{X} > t_\alpha, \quad \text{avec } t_\alpha = \theta_0 + q_{1-\alpha}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

Par Neyman-Pearson δ est UPP parmi les tests de niveau α.

- **Analyse du test.** δ est identique $\forall \theta_1 > \theta_0$ (δ ne dépend que de α et θ_0) ; donc δ est aussi UPP pour un test de la forme :

$$H_0 : \theta = \theta_0 / H_1 : \theta > \theta_0.$$

On peut montrer que δ **est aussi UPP pour un test de la forme** : $H_0 : \theta \leq \theta_0$ / $H_1 : \theta > \theta_0$

exercice

Retour sur l'exemple gaussien / test sur la moyenne

- **Test sur hypothèses simples**

$$H_0 : \theta = \theta_0 / H_1 : \theta = \theta_1, \quad \text{avec } \theta_0 < \theta_1$$

- **Rappel du test optimal.**

$$\delta(\underline{X}) = 1 \iff \bar{X} > t_\alpha, \quad \text{avec } t_\alpha = \theta_0 + q_{1-\alpha}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

  Par Neyman-Pearson δ est UPP parmi les tests de niveau α.

- **Analyse du test.** δ est identique $\forall \theta_1 > \theta_0$ (δ ne dépend que de α et θ_0) ; donc δ est aussi UPP pour un test de la forme :

$$H_0 : \theta = \theta_0 / H_1 : \theta > \theta_0.$$

On peut montrer que δ **est aussi UPP pour un test de la forme :** $H_0 : \theta \leq \theta_0$ / $H_1 : \theta > \theta_0$

exercice

Plan du cours

Contexte : $X_1, X_2, \ldots \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{P}_\theta$

Lorsque déterminer la loi de $T_n(\underline{X}_n)$ est complexe

➠ recours à la loi limite pour $n \to \infty$.

Example « Fiabilité composant »

$$\mathcal{R}_{\alpha,n} = \{\underline{x}_n \text{ tel que } T_n(\underline{x}_n) = \bar{x}_n \ > \ \tilde{t}_{\alpha,n}\}.$$

avec $\tilde{t}_{\alpha,n}$ choisi de sorte que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\theta_0}\left(T_n(\underline{X}_n) > \tilde{t}_{\alpha,n}\right) = \alpha.$$

Par le TCL on a sous H_0 : $\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{\theta_0}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\theta_0^2}\right)$, donc

$$\tilde{t}_{\alpha,n} \ = \ \frac{1}{\theta_0} + \frac{1}{\theta_0\sqrt{n}}\, q_{1-\alpha}$$

avec $q_{1-\alpha}$ le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Contexte : $X_1, X_2, \ldots \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{P}_\theta$

Lorsque déterminer la loi de $T_n(\underline{X}_n)$ est complexe

➠ recours à la loi limite pour $n \to \infty$.

Example « Fiabilité composant »

$$\mathcal{R}_{\alpha,n} = \{\underline{x}_n \text{ tel que } T_n(\underline{x}_n) = \bar{x}_n \; > \; \tilde{t}_{\alpha,n}\}.$$

avec $\tilde{t}_{\alpha,n}$ choisi de sorte que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\theta_0}\left(T_n(\underline{X}_n) > \tilde{t}_{\alpha,n}\right) = \alpha.$$

Par le TCL on a sous H_0 : $\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{\theta_0}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\theta_0^2}\right)$, donc

$$\tilde{t}_{\alpha,n} \; = \; \frac{1}{\theta_0} + \frac{1}{\theta_0\sqrt{n}}\, q_{1-\alpha}$$

avec $q_{1-\alpha}$ le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Contexte : $X_1, X_2, \ldots \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{P}_\theta$

Lorsque déterminer la loi de $T_n(\underline{X}_n)$ est complexe

➠ recours à la loi limite pour $n \to \infty$.

Example « Fiabilité composant »

$$\mathcal{R}_{\alpha,n} = \{\underline{x}_n \text{ tel que } T_n(\underline{x}_n) = \bar{x}_n \; > \; \tilde{t}_{\alpha,n}\}.$$

avec $\tilde{t}_{\alpha,n}$ choisi de sorte que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\theta_0}\left(T_n(\underline{X}_n) > \tilde{t}_{\alpha,n}\right) = \alpha.$$

Par le TCL on a sous H_0 : $\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{\theta_0}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathscr{N}\left(0, \frac{1}{\theta_0^2}\right)$, donc

$$\tilde{t}_{\alpha,n} \; = \; \frac{1}{\theta_0} + \frac{1}{\theta_0\sqrt{n}}\, q_{1-\alpha}$$

avec $q_{1-\alpha}$ le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi $\mathscr{N}(0,1)$.

Contexte : $X_1, X_2, \ldots \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{P}_\theta$

Lorsque déterminer la loi de $T_n(\underline{X}_n)$ est complexe

➠ recours à la loi limite pour $n \to \infty$.

Example « Fiabilité composant »

$$\mathcal{R}_{\alpha,n} = \{\underline{x}_n \text{ tel que } T_n(\underline{x}_n) = \bar{x}_n \; > \; \tilde{t}_{\alpha,n}\}.$$

avec $\tilde{t}_{\alpha,n}$ choisi de sorte que :

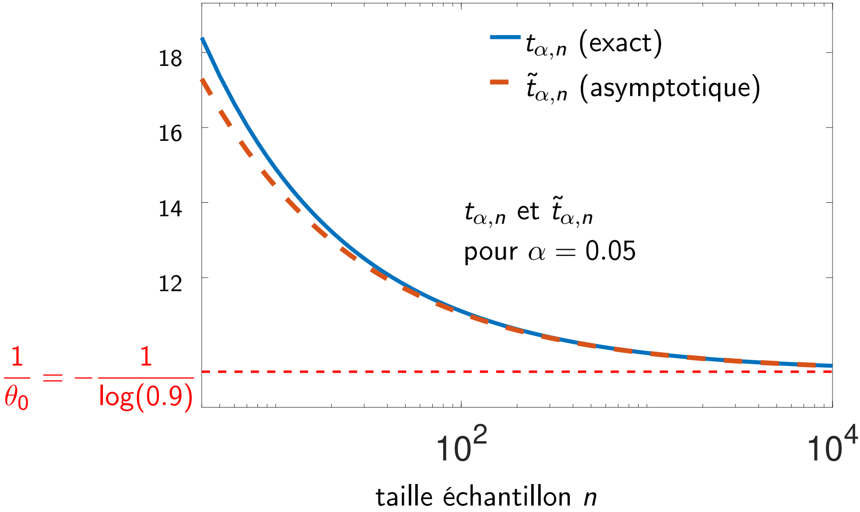
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\theta_0}\left(T_n(\underline{X}_n) > \tilde{t}_{\alpha,n}\right) = \alpha.$$

Par le TCL on a sous H_0 : $\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{\theta_0}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathscr{N}\left(0, \frac{1}{\theta_0^2}\right)$, donc

$$\tilde{t}_{\alpha,n} \; = \; \frac{1}{\theta_0} + \frac{1}{\theta_0\sqrt{n}}\, q_{1-\alpha}$$

avec $q_{1-\alpha}$ le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi $\mathscr{N}(0,1)$.

Application « Fiabilité composant »



Plan du cours

Test d'adéquation à une loi donnée

Contexte : $X_1, X_2, \ldots \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{P}$ avec P inconnue, quelconque

➠ $\theta = \mathrm{P}$, $\Theta = \{$ lois de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))\}$.

Hypothèses statistiques testées

Pour une loi P_0 donnée, on considère les hypothèses :

$H_0 : \mathrm{P} = \mathrm{P}_0$
$H_1 : \mathrm{P} \neq \mathrm{P}_0$

Exemple « Fiabilité composant » :

- Le fabricant de composants sait, de par des analyses passées, que les durées de vie devraient suivre une loi $\mathcal{E}(\theta_0)$.
- Pour vérifier le bon fonctionnement de la chaîne, il veut tester si $H_0 : \mathrm{P} = \mathcal{E}(\theta_0)$ est toujours vraie.

➠ retour au slide 12

Test d'adéquation à une loi donnée

Contexte : $X_1, X_2, \ldots \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{P}$ avec P inconnue, quelconque

➠ $\theta = \mathrm{P}$, $\Theta = \{$ lois de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))\}$.

Hypothèses statistiques testées

Pour une loi P_0 donnée, on considère les hypothèses :

$H_0 : \mathrm{P} = \mathrm{P}_0$
$H_1 : \mathrm{P} \neq \mathrm{P}_0$

Exemple « Fiabilité composant » :

- Le fabricant de composants sait, de par des analyses passées, que les durées de vie devraient suivre une loi $\mathcal{E}(\theta_0)$.
- Pour vérifier le bon fonctionnement de la chaîne, il veut tester si $H_0 : \mathrm{P} = \mathcal{E}(\theta_0)$ est toujours vraie.

➠ retour au slide 12

Test d'adéquation à une loi donnée

Contexte : $X_1, X_2, \ldots \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{P}$ avec P inconnue, quelconque

➠ $\theta = \mathrm{P}$, $\Theta = \{$ lois de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))\}$.

Hypothèses statistiques testées

Pour une loi P_0 donnée, on considère les hypothèses :

$H_0 : \mathrm{P} = \mathrm{P}_0$
$H_1 : \mathrm{P} \neq \mathrm{P}_0$

Exemple « Fiabilité composant » :

- Le fabricant de composants sait, de par des analyses passées, que les durées de vie devraient suivre une loi $\mathcal{E}(\theta_0)$.
- Pour vérifier le bon fonctionnement de la chaîne, il veut tester si $H_0 : \mathrm{P} = \mathcal{E}(\theta_0)$ est toujours vraie.

➠ retour au slide 12

Statistique de test du χ^2

Soient $(A_1, \ldots, A_K)$ une partition du support de P_0, et

- $N = (N_1, \ldots, N_K)$ avec
  $N_k = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_k}(X_i)$ $\rightarrow$ effectifs observés,
- $p = (p_1, \ldots, p_K)$ avec
  $p_k = \mathrm{P}_0\left(X_1 \in A_k\right)$ $\rightarrow$ np_k = effectifs moyens sous H_0.

Proposition

Sous l'hypothèse H_0, N suit une loi multinomiale $\mathrm{Multi}(n, p)$ et

$$T_n = \sum_{k=1}^{K} \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \chi^2(K-1).$$

(loi du χ^2 à $K-1$ degrés de liberté)

Complément : la loi multinomiale

Complément : la loi du χ^2

Statistique de test du χ^2

Soient $(A_1, \ldots, A_K)$ une partition du support de P_0, et

- $N = (N_1, \ldots, N_K)$ avec
  $N_k = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_k}(X_i) \quad \to$ effectifs observés,
- $p = (p_1, \ldots, p_K)$ avec
  $p_k = \mathrm{P}_0\left(X_1 \in A_k\right) \ \to np_k =$ effectifs moyens sous H_0.

Proposition

Sous l'hypothèse H_0, N suit une loi multinomiale $\mathrm{Multi}(n, p)$ et

$$T_n = \sum_{k=1}^{K} \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k} \xrightarrow[n \to \infty]{\text{loi}} \chi^2(K-1).$$

(loi du χ^2 à $K-1$ degrés de liberté)

Complément : la loi multinomiale

Complément : la loi du χ^2

Test du χ^2

Rappel. On veut tester $H_0 : \mathrm{P} = \mathrm{P}_0$ contre $H_1 : \mathrm{P} \neq \mathrm{P}_0$.

Test d'adéquation du χ^2

Soit $0 < \alpha < 1$ et soit T la statistique de test

$$T = \sum_{k=1}^{K} \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k}.$$

Alors le test du χ^2 s'écrit

$$\delta = \mathbb{1}_{T > t_\alpha},$$

avec t_α quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi $\chi^2(K-1)$.

⚠ Condition d'application : choisir $A_1, \ldots, A_K$ tel que $np_k \geq 5$, $\forall k$.

Test du χ^2

Rappel. On veut tester $H_0 : \mathrm{P} = \mathrm{P}_0$ contre $H_1 : \mathrm{P} \neq \mathrm{P}_0$.

Test d'adéquation du χ^2

Soit $0 < \alpha < 1$ et soit T la statistique de test

$$T = \sum_{k=1}^{K} \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k}.$$

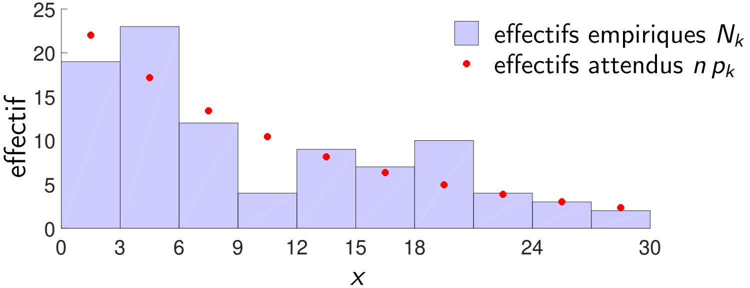
Alors le test du χ^2 s'écrit

$$\delta = \mathbb{1}_{T > t_\alpha},$$

avec t_α quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi $\chi^2(K-1)$.

⚠ Condition d'application : choisir $A_1, \ldots, A_K$ tel que $np_k \geq 5$, $\forall k$.

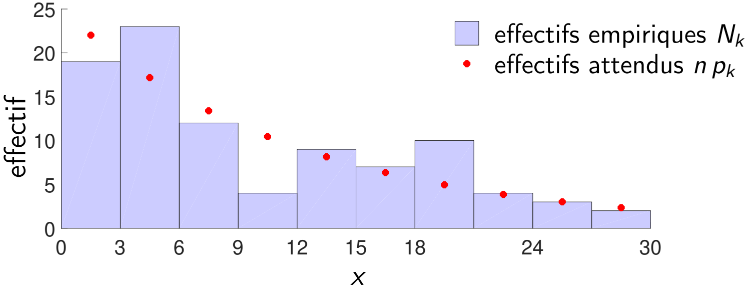
Le test d'adéquation du χ^2 : « Fiabilité composant »



classe	$[0,3[$	$[3,6[$	$[6,9[$	$[9,12[$	$[12,15[$	$[15,18[$	$[18,\infty[$
N_k	19	23	12	4	9	7	19
$n\,p_k$	25.90	19.2	14.2	10.5	7.8	5.8	11.6

$$T(\underline{X}_n) = \sum_{k=1}^{7} \frac{(N_k - n\,p_k)^2}{n\,p_k} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \chi^2(7-1)$$

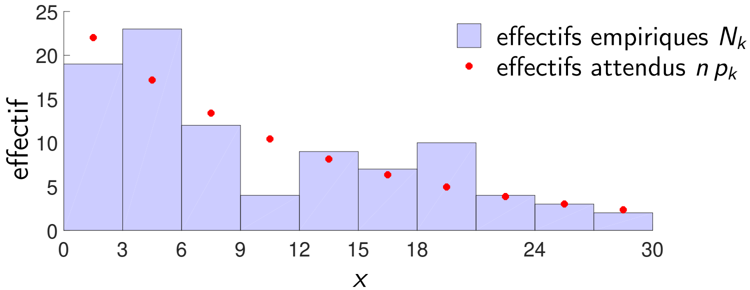
Le test d'adéquation du χ^2 : « Fiabilité composant »



classe	$[0,3[$	$[3,6[$	$[6,9[$	$[9,12[$	$[12,15[$	$[15,18[$	$[18,\infty[$
N_k	19	23	12	4	9	7	19
$n\,p_k$	25.90	19.2	14.2	10.5	7.8	5.8	11.6

$$T(\underline{X}_n) = \sum_{k=1}^{7} \frac{(N_k - n\,p_k)^2}{n\,p_k} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \chi^2(7-1)$$

Le test d'adéquation du χ^2 : « Fiabilité composant »

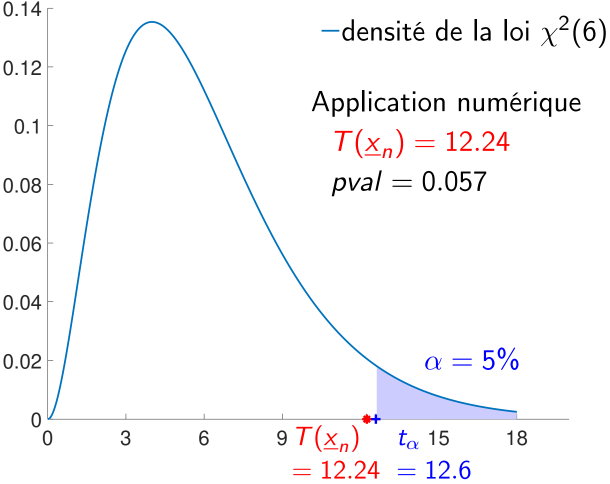


classe	$[0,3[$	$[3,6[$	$[6,9[$	$[9,12[$	$[12,15[$	$[15,18[$	$[18,\infty[$
N_k	19	23	12	4	9	7	19
$n\,p_k$	25.90	19.2	14.2	10.5	7.8	5.8	11.6

$$T(\underline{X}_n) = \sum_{k=1}^{7} \frac{(N_k - n\,p_k)^2}{n\,p_k} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \chi^2(7-1)$$

Le test d'adéquation du χ^2 : « Fiabilité composant »

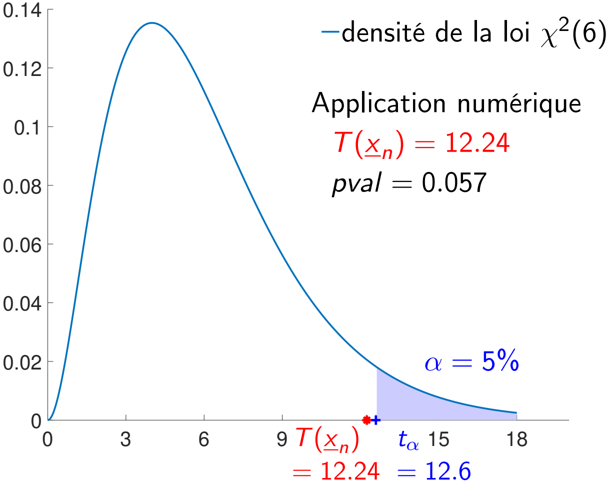
Application numérique. $n = 100$, $T(\underline{x}_n) = 12.24$



➠ pour un niveau à 5%, H_0 est acceptée

Le test d'adéquation du χ^2 : « Fiabilité composant »

Application numérique. $n = 100$, $T(\underline{x}_n) = 12.24$



➠ pour un niveau à 5%, H_0 est acceptée

Pour aller plus loin...

- Test du χ^2 pour l'adéquation à une famille de lois
  - extension du test présenté au cas où il y a des paramètres à estimer sous H_0

complément

- Test de Kolmogorov-Smirnov
  - un autre test, fondé sur la fonction de répartition,
  - et ne nécessitant pas le choix d'un partition

complément

Pour aller plus loin...

- Test du χ^2 pour l'adéquation à une famille de lois
  - extension du test présenté au cas où il y a des paramètres à estimer sous H_0

complément

- Test de Kolmogorov-Smirnov
  - un autre test, fondé sur la fonction de répartition,
  - et ne nécessitant pas le choix d'un partition

complément

Plan du cours

Plan du cours

Exercice 1 (Test d'une proportion)

corrigé

Dans le cadre d'un jeu de pile ou face on souhaite tester si une pièce est équilibrée.

Questions

- (i) Proposer une expérience permettant de tester cette hypothèse. Préciser le modèle statistique sous-jacent et définir les hypothèses nulle et alternative.
- (ii) Proposer un test asymptotique de niveau α.

Exercice 2 (Test sur la fiabilité d'un composant)

corrigé

Un constructeur souhaite proposer à ses clients une garantie sur des ampoules. On suppose que la durée de vie d'une ampoule suit loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$.

Questions

Proposer un test UPP pour le test suivant :

$$H_0 : \Theta_0 = \{\theta \geq \theta_0\} \qquad \text{(ampoule insuffisamment fiable)}$$
$$H_1 : \Theta_1 = \{\theta < \theta_0\} \qquad \text{(ampoule suffisamment fiable)}$$

avec $\theta_0 > 0$ un seuil fixé.

retour au slide 11

retour au slide 26

Plan du cours

Corrigé de l'exercice 1

retour au sujet

i) on réalise n expériences de "pile ou face" dont les issues sont modélisées par n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de $Ber(\theta)$.
On veut tester si

$$H_0 : \theta = \frac{1}{2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Theta_0 = \left\{ \frac{1}{2} \right\} \quad \text{(hypothèse simple)},$$

vs.

$$H_1 : \theta \neq \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad \Theta_1 = \left] 0, \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}, 1 \right[\quad \text{(hypothèse bilatérale)}.$$

ii) Posons $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$, la moyenne empirique de l'échantillon. Par application directe du TCL, il vient que :

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)/n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$$

Pour construire un test asymptotique bilatéral de niveau α, on se place sous H_0. Il vient la convergence en loi suivante :

$$2\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1).$$

On considère une zone de rejet de la forme : $2\sqrt{n}|\hat{\theta}_n - \frac{1}{2}| > c_\alpha$. où c_α est choisi en fixant le risque de première espèce à α.

retour au sujet

ii) Soit

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(2\sqrt{n}\left|\hat{\theta}_n - \frac{1}{2}\right| > c_\alpha\right) = \alpha.$$

On en déduit que $c_\alpha = q_{1-\frac{\alpha}{2}}$, quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ d'une $\mathcal{N}(0,1)$.

On rejette l'hypothèse H_0 au profit de H_1 au niveau α dès que :

$$\left|\hat{\theta}_n - \frac{1}{2}\right| > q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Ainsi l'écart entre $\hat{\theta}_n$ et $1/2$ est considéré comme significatif au niveau α dès qu'il est supérieur à $q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Corrigé de l'exercice 2

retour au sujet

Soient $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(\theta)$

$$H_0 : \Theta_0 = \{\theta \geq \theta_0\} \qquad \text{(composant insuffisamment fiable)}$$
$$H_1 : \Theta_1 = \{\theta < \theta_0\} \qquad \text{(composant suffisamment fiable)}$$

Par Neyman-Pearson, le **test du RV** est UPP pour

$$H_0 : \Theta_0 = \{\theta_0\} \quad / \quad H_1 : \Theta_1 = \{\theta_1\}, \quad \text{avec} \quad \theta_1 < \theta_0$$

$$T^{\text{RV}}(\underline{X}) = \frac{\theta_1^n \exp\left(-\theta_1 \sum_{i=1}^n X_i\right)}{\theta_0^n \exp\left(-\theta_0 \sum_{i=1}^n X_i\right)}$$

$$= \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n \exp\left((\theta_0 - \theta_1) \sum_{i=1}^n X_i\right)$$

Corrigé de l'exercice 2

retour au sujet

Soient $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(\theta)$

$$H_0 : \Theta_0 = \{\theta \geq \theta_0\} \qquad \text{(composant insuffisamment fiable)}$$
$$H_1 : \Theta_1 = \{\theta < \theta_0\} \qquad \text{(composant suffisamment fiable)}$$

Par Neyman-Pearson, le **test du RV** est UPP pour

$$H_0 : \Theta_0 = \{\theta_0\} \quad / \quad H_1 : \Theta_1 = \{\theta_1\}, \quad \text{avec} \quad \theta_1 < \theta_0$$

$$\begin{aligned} T^{\mathrm{RV}}(\underline{X}) &= \frac{\theta_1^n \exp\left(-\theta_1 \sum_{i=1}^n X_i\right)}{\theta_0^n \exp\left(-\theta_0 \sum_{i=1}^n X_i\right)} \\ &= \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n \exp\left((\theta_0 - \theta_1) \sum_{i=1}^n X_i\right) \end{aligned}$$

retour au sujet

On définit alors la **zone de rejet** de ce test au niveau α :

$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{ \underline{x} \mid T^{\mathrm{RV}}(\underline{x}) > t_\alpha^{\mathrm{RV}} \right\} = \left\{ \underline{x} \mid T(\underline{x}) = \bar{x} > t_\alpha \right\}.$$

Rappel : si $\theta = \theta_0$, alors $\theta_0 \bar{X} \sim \Gamma(p = n, \lambda = n)$.

➠ $t_{\alpha,n} = \frac{1}{\theta_0} q_{1-\alpha}$

où q_r est le quantile d'ordre r de la loi $\Gamma(p = n, \lambda = n)$.

Ce test est aussi UPP pour sa version composite, en effet :

- le test du rapport de vraisemblance est identique $\forall \theta_1 < \theta_0$,
- la fonction $\theta \mapsto \mathbb{P}_\theta(\delta = 1)$ est strictement $\searrow$.

Bilan. On a construit un test UPP au niveau α.

Corrigé de l'exercice 2

retour au sujet

On définit alors la **zone de rejet** de ce test au niveau α :

$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{ \underline{x} \;\middle|\; T^{\mathrm{RV}}(\underline{x}) > t_\alpha^{\mathrm{RV}} \right\} = \left\{ \underline{x} \;\middle|\; T(\underline{x}) = \bar{x} > t_\alpha \right\}.$$

Rappel : si $\theta = \theta_0$, alors $\theta_0 \bar{X} \sim \Gamma(p = n, \lambda = n)$.

➠ $t_{\alpha,n} = \frac{1}{\theta_0} q_{1-\alpha}$

où q_r est le quantile d'ordre r de la loi $\Gamma(p = n, \lambda = n)$.

Ce test est aussi UPP pour sa version composite, en effet :

- le test du rapport de vraisemblance est identique $\forall \theta_1 < \theta_0$,
- la fonction $\theta \mapsto \mathbb{P}_\theta(\delta = 1)$ est strictement $\searrow$.

Bilan. On a construit un test UPP au niveau α.

On définit alors la **zone de rejet** de ce test au niveau α :

$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{\underline{x} \mid T^{\mathrm{RV}}(\underline{x}) > t_\alpha^{\mathrm{RV}}\right\} = \{\underline{x} \mid T(\underline{x}) = \bar{x} > t_\alpha\}.$$

Rappel : si $\theta = \theta_0$, alors $\theta_0 \bar{X} \sim \Gamma(p = n, \lambda = n)$.

➠ $t_{\alpha,n} = \frac{1}{\theta_0}\, q_{1-\alpha}$

où q_r est le quantile d'ordre r de la loi $\Gamma(p = n, \lambda = n)$.

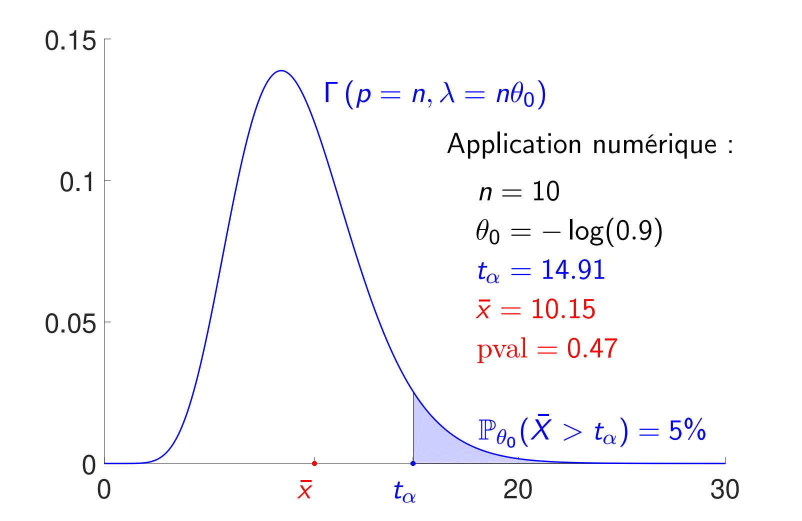
Ce test est aussi UPP pour sa version composite, en effet :

- le test du rapport de vraisemblance est identique $\forall \theta_1 < \theta_0$,
- la fonction $\theta \mapsto \mathbb{P}_\theta(\delta = 1)$ est strictement $\searrow$.

Bilan. On a construit un test UPP au niveau α.

Corrigé de l'exercice 2

retour au sujet



- pour un niveau à 5%, H_0 n'est pas rejetée
- par précaution, le fabricant ne proposera pas de garantie.

Plan du cours

Plan du cours

Démonstration

Observons que t_α vérifie par construction

$$F_0(t_\alpha) = 1 - \alpha.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \delta = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad T > t_\alpha \\ &\Leftrightarrow \quad F_0(T) > F_0(t_\alpha) = 1 - \alpha \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{pval} < \alpha \end{aligned}$$

$\square$

retour au slide 22

Test du rapport de vraisemblance généralisé

Il permet de construire un test lorsque Θ_0 et/ou Θ_1 sont/est composites.

- Statistique de test :

$$T(\underline{X}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_1} \mathcal{L}(\theta; \underline{X})}{\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathcal{L}(\theta; \underline{X})}.$$

- Le test n'est pas, en général, uniformément le plus puissant (UPP) au niveau α.

Quelques mots sur la loi multinomiale $Multi(n, p)$

Paramètres de la loi

- n entier ≥ 1,
- K entier ≥ 2 et $p \in (\mathbb{R}_\star^+)^K$ tel que $\sum_{k=1}^K p_k = 1$.

Soient $n_1, \dots, n_K$ entiers ≥ 0 tel que $\sum_{k=1}^K n_k = n$:

Si $N \sim Multi(n, p)$, $\mathbb{P}\left(N_1 = n_1, \dots, N_K = n_k\right) = \dfrac{n!}{n_1! \dots n_K!} p_1^{n_1} \dots p_K^{n_K}$

Moments

- moyenne : $\mathbb{E}_p(N) = np$
- matrice de covariance : $\mathrm{cov}_p(N_i, N_j) = n(p_i \delta_{ij} - p_i p_j)$

Loi marginales

- Les lois marginales sont binomiales : $N_j \sim \mathrm{Bin}(n, p_j)$.

retour au slide 30

Quelques mots sur la loi du $\chi^2(q)$

Paramètre de la loi

- q entier ≥ 1 : nombre de degrés de liberté.

Définition. Si $Y_1, \ldots, Y_q \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ alors

$$T = \sum_{k=1}^{q} Y_k^2 \sim \chi^2(q)$$

La loi du χ^2 est un cas particulier de la loi Γ :

$$\chi^2(q) = \Gamma\left(p = \frac{q}{2}, \lambda = \frac{1}{2}\right)$$

➠ Les propriétés de la loi du χ^2 découlent de celles de la loi Γ.

Moyenne

- $\mathbb{E}_q(T) = q$

Variance

- $\mathrm{var}_q(T) = 2q$

➠ retour au slide 30

Le test d'adéquation du χ^2 avec estimation de paramètres

La durée de vie d'un composant suit-elle une loi exponentielle ?

➠ **Hypothèse** H_0 **:** $\exists\theta > 0,\ \mathrm{P} = \mathrm{P}_\theta = \mathcal{E}(\theta)$.

Démarche

1. Construction d'un estimateur consistant de $\theta \to \hat{\theta}$.
2. Test d'adéquation à la loi $\mathrm{P}_{\hat{\theta}}$.

Mise en œuvre

$$\hat{p}_k = \mathrm{P}_{\hat{\theta}}(X_1 \in A_k)$$

$$T(\underline{X}_n) = \sum_{k=1}^{K} \frac{(N_k - n\hat{p}_k)^2}{n\hat{p}_k} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \chi^2(K-1-q) \text{ avec } q = \mathrm{card}(\theta)$$

Rejet de H_0 si $T(\underline{x}_n) > t_{1-\alpha}$ ($t_{1-\alpha}$ quantile d'ordre $1-\alpha$ d'une $\chi^2(K-1-q)$).

➠ retour au slide 34

Le test d'adéquation du χ^2 avec estimation de paramètres

La durée de vie d'un composant suit-elle une loi exponentielle ?

➠ **Hypothèse H_0 :** $\exists\theta > 0,\ \mathrm{P} = \mathrm{P}_\theta = \mathcal{E}(\theta)$.

Démarche

1. Construction d'un estimateur consistant de $\theta \to \hat{\theta}$.
2. Test d'adéquation à la loi $\mathrm{P}_{\hat{\theta}}$.

Mise en œuvre

$\hat{p}_k = \mathrm{P}_{\hat{\theta}}(X_1 \in A_k)$

$$T(\underline{X}_n) = \sum_{k=1}^{K} \frac{(N_k - n\hat{p}_k)^2}{n\hat{p}_k} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \chi^2(K-1-q) \text{ avec } q = \mathrm{card}(\theta)$$

Rejet de H_0 si $T(\underline{x}_n) > t_{1-\alpha}$ ($t_{1-\alpha}$ quantile d'ordre $1-\alpha$ d'une $\chi^2(K-1-q)$).

➠ retour au slide 34

Le test d'adéquation du χ^2 avec estimation de paramètres

La durée de vie d'un composant suit-elle une loi exponentielle ?

➠ **Hypothèse H_0 :** $\exists\theta > 0,\ \mathrm{P} = \mathrm{P}_\theta = \mathcal{E}(\theta)$.

Démarche

1. Construction d'un estimateur consistant de $\theta \to \hat{\theta}$.
2. Test d'adéquation à la loi $\mathrm{P}_{\hat{\theta}}$.

Mise en œuvre

$\hat{p}_k = \mathrm{P}_{\hat{\theta}}(X_1 \in A_k)$

$$T(\underline{X}_n) = \sum_{k=1}^{K} \frac{(N_k - n\hat{p}_k)^2}{n\hat{p}_k} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \chi^2(K-1-q) \text{ avec } q = \mathrm{card}(\theta)$$

Rejet de H_0 si $T(\underline{x}_n) > t_{1-\alpha}$ ($t_{1-\alpha}$ quantile d'ordre $1-\alpha$ d'une $\chi^2(K-1-q)$).

➠ retour au slide 34

Le test d'adéquation du χ^2 avec estimation de paramètres

La durée de vie d'un composant suit-elle une loi exponentielle ?

➠ **Hypothèse** H_0 **:** $\exists\theta > 0,\ \mathrm{P} = \mathrm{P}_\theta = \mathcal{E}(\theta)$.

Démarche

1. Construction d'un estimateur consistant de $\theta \to \hat{\theta}$.
2. Test d'adéquation à la loi $\mathrm{P}_{\hat{\theta}}$.

Mise en œuvre

$$\hat{p}_k = \mathrm{P}_{\hat{\theta}}(X_1 \in A_k)$$

$$T(\underline{X}_n) = \sum_{k=1}^{K} \frac{(N_k - n\hat{p}_k)^2}{n\hat{p}_k} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \chi^2(K-1-q) \text{ avec } q = \mathrm{card}(\theta)$$

Rejet de H_0 si $T(\underline{x}_n) > t_{1-\alpha}$ ($t_{1-\alpha}$ quantile d'ordre $1-\alpha$ d'une $\chi^2(K-1-q)$).

➠ retour au slide 34

Le test de Kolmogorov-Smirnov

Test d'adéquation à une loi fixée : $H_0 : \mathrm{P} = \mathrm{P}_0$.

Distance de Kolmogorov-Smirnov

On appelle distance de Kolmogorov-Smirnov la quantité

$$D_n = \sup_x \left| \hat{F}_n(x) - F_0(x) \right|,$$

avec F_0 la FR de P_0 et $\hat{F}_n$ la FR empirique : $\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}$.

Test de Kolmogorov-Smirnov, de niveau asymptotique α

Sous hypothèse H_0, si F_0 est continue :

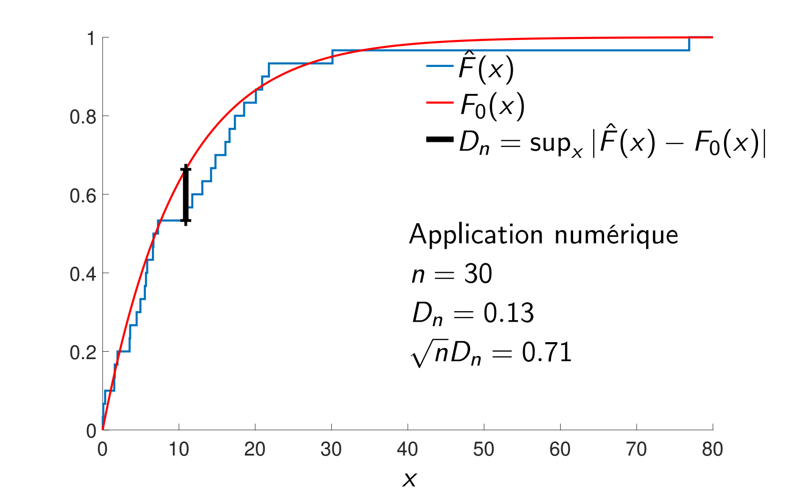
$$T(\underline{X}_n) = \sqrt{n} D_n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{loi}} \mathcal{K},$$

où $\mathcal{K}$ est la loi de Kolmogorov-Smirnov.

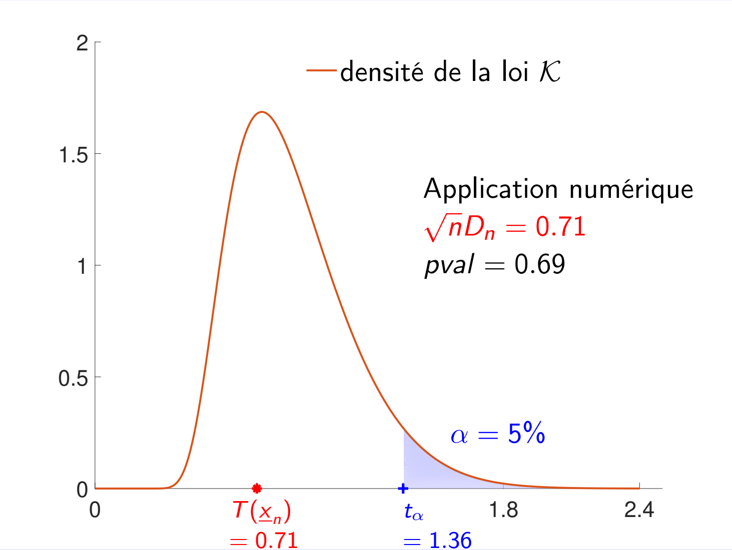
➠ on rejette H_0 si $T(\underline{x}_n) > t_\alpha$ (avec t_α quantile de la loi $\mathcal{K}$)

Le test de Kolmogorov-Smirnov

« Fiabilité composant » : $H_0 : \mathrm{P} = \mathcal{E}(\theta_0)$ avec $\theta_0 = 0.1$



Le test de Kolmogorov-Smirnov



➠ pour un niveau à 5%, H_0 est acceptée

➠ retour au slide 34