



CentraleSupélec

# Statistique et apprentissage

Chargés de cours (ordre alphabétique) :

Julien Bect, Gilles Faÿ, Ziad Kobeissi, Laurent Le Brusquet,  
Vincent Lescarret, Arshak Minasyan, Arthur Tenenhaus<sup>†</sup> & Xujia Zhu

<sup>†</sup> Coordinateur du cours

1/69

Cours 3/9

## Lois asymptotiques et intervalles de confiance

### Objectifs du cours 3

- ▶ Compléter l'analyse asymptotique des estimateurs déjà présentée (consistance) par l'étude de leur vitesse de convergence.
- ▶ Montrer la/les démarche(s) utilisée(s) pour construire des intervalles de confiance.

2/69

# Plan du cours

- 1 – Lois asymptotiques et vitesse de convergence
- 2 – Régions et intervalles de confiance
- 3 – Exercices types
- 4 – Annexes

3/69

## Rappel : cadre mathématique

Pour toute la section :

- ▶ On considère un **modèle statistique**

$$\left( \mathcal{X}, \mathcal{A}, \left\{ \mathbb{P}_\theta^X, \theta \in \Theta \right\} \right),$$

le plus souvent **paramétrique** ( $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ ).

- ▶  $X_1, X_2, \dots \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathbb{P}_\theta$ , définis sur un même  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\theta)$ .
- ▶ On veut estimer un « **paramètre d'intérêt** » :
  - ▶ soit  $\theta$  lui-même (on supposera dans ce cas  $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ ),
  - ▶ soit, plus généralement,  $\eta = g(\theta) \in \mathbb{R}^q$ .

4/69

## Plan du cours

### 1 – Lois asymptotiques et vitesse de convergence

#### 1.1 – Définitions et exemples

#### 1.2 – Outils théoriques

#### 1.3 – Efficacité asymptotique

### 2 – Régions et intervalles de confiance

### 3 – Exercices types

### 4 – Annexes

## Plan du cours

### 1 – Lois asymptotiques et vitesse de convergence

#### 1.1 – Définitions et exemples

#### 1.2 – Outils théoriques

#### 1.3 – Efficacité asymptotique

### 2 – Régions et intervalles de confiance

### 3 – Exercices types

### 4 – Annexes

# Rappel probabilités : Théorème Central Limite (TCL)

## Théorème

Soient

- ▶ une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de vecteurs aléatoires iid, à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et admettant un moment d'ordre 2.
- ▶  $\mu = \mathbb{E}(X_1)$  et  $\Sigma = \text{var}(X_1) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ .

Alors :

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \Sigma),$$

avec  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  la moyenne empirique.

⇒ On dit que la moyenne empirique  $\bar{X}_n$

- ▶ est un estimateur **asymptotiquement gaussien** de  $\mu = \mathbb{E}(X_1)$

⇒ définition : normalité asymptotique

- ▶ qui converge à la **vitesse**  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

⇒ définition : vitesse de convergence

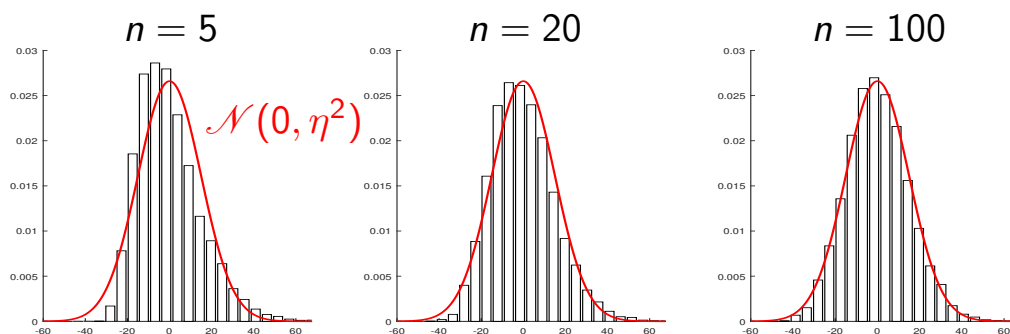
5/69

## Exemple : application « fiabilité composant »

Rappels :

- ▶  $X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(\theta)$ ,  $\theta > 0$ , et  $\eta = \mathbb{E}_\theta(X_1) = \frac{1}{\theta}$ .
- ▶  $\hat{\eta}_n = \bar{X}_n$  est obtenu par MV et méthode des moments.

⇒ Application directe du TCL :  $\sqrt{n} (\bar{X}_n - \eta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \eta^2)$ .



Histogrammes de  $\sqrt{n} (\bar{X}_n - \eta)$  obtenus à partir de 10000 réalisations de  $\underline{X}_n$

6/69

## Vitesse de convergence

Soit  $\hat{\eta}_n = \hat{\eta}_n(X_1, \dots, X_n)$  un estimateur consistant de  $\eta = g(\theta)$ .

### Définition

S'il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  à valeurs réelles telle que :

- ▶  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,
- ▶  $a_n (\hat{\eta}_n - \eta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} Z$ ,
- ▶ avec  $Z$  variable aléatoire **non dégénérée**\*

alors  $\hat{\eta}_n$  converge vers  $\eta$  à la vitesse  $\frac{1}{a_n}$ .

\* On dit que  $Z$  est **dégénérée** si :

- ▶ cas scalaire :  $\exists c \in \mathbb{R}, Z = c$  p.s. ;
- ▶ cas vectoriel :  $\exists a \in \mathbb{R}^q \setminus \{0\}, \exists c \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^q a_j Z^{(j)} = c$  p.s.

**Remarque.** Lorsque  $Z$  admet un moment d'ordre 2, on peut montrer que :

$Z$  est non dégénérée ssi sa matrice de covariance est inversible.  **Démonstration**

7/69

## Normalité asymptotique

Soit  $\hat{\eta}_n = \hat{\eta}_n(X_1, \dots, X_n)$  un estimateur **consistant** de  $\eta = g(\theta)$ .

### Définition

S'il existe

- ▶ une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  à valeurs réelles telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,
- ▶ une matrice  $\Sigma(\theta)$  symétrique définie positive,

telles que

$$a_n (\hat{\eta}_n - \eta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \Sigma(\theta)), \quad (1)$$

alors  $\hat{\eta}_n$  est dit **asymptotiquement normal**.

**Vocabulaire.**  $\Sigma(\theta)$  s'appelle la **matrice de covariance asymptotique** (variance asymptotique dans le cas scalaire).

Note : on peut m.q. (1) avec  $a_n \rightarrow +\infty$  implique la consistance (faible).

 **Convergence en loi vers une constante**

8/69

# Plan du cours

## 1 – Lois asymptotiques et vitesse de convergence

### 1.1 – Définitions et exemples

### 1.2 – Outils théoriques

### 1.3 – Efficacité asymptotique

## 2 – Régions et intervalles de confiance

## 3 – Exercices types

## 4 – Annexes

# Théorème de continuité

## Théorème (Mann-Wald)

Soient

- ▶  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction mesurable,
- ▶  $Y$  une VA à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ ,

telles que

$h$  est continue au point  $Y$ , presque sûrement.

Alors, pour toute suite  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de VA à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ ,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad Y_n &\xrightarrow{\text{ps}} Y \quad \Rightarrow \quad h(Y_n) \xrightarrow{\text{ps}} h(Y), \\ \text{(ii)} \quad Y_n &\xrightarrow{\mathbb{P}} Y \quad \Rightarrow \quad h(Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(Y), \\ \text{(iii)} \quad Y_n &\xrightarrow{\text{loi}} Y \quad \Rightarrow \quad h(Y_n) \xrightarrow{\text{loi}} h(Y). \end{aligned}$$

Démonstration : cf. CIP pour le cas où  $h$  est continu. Le cas général est admis.

## Exemple « fiabilité composant » (suite)

Rappels :

- ▶  $X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(\theta)$ ,  $\theta > 0$ , et  $\eta = \mathbb{E}_\theta(X_1) = \frac{1}{\theta}$ .
- ▶  $\hat{\eta}_n = \bar{X}_n$  est obtenu par MV et méthode des moments.

Loi des grands nombres (forte et en m.q.) :

$$\hat{\eta}_n = \bar{X}_n \xrightarrow{\text{ps}, L^2} \eta.$$

Par le théorème de continuité :

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{\hat{\eta}_n} \xrightarrow{\text{ps}} \frac{1}{\eta} = \theta,$$

donc  $\hat{\theta}_n$  est **fortement consistant** pour l'estimation de  $\theta$ .

Remarque : on peut montrer que  $\hat{\theta}_n$  est également consistant dans  $L^2$ .

10/69

## Théorème de Slutsky

### Théorème

Soient

- ▶  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de vecteurs aléatoires qui converge en loi vers une VA  $X$  :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} X,$$

- ▶  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de vecteurs aléatoires qui converge en loi vers une **constante**  $c$  :

$$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} c,$$

Alors

$$(X_n, Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} (X, c).$$

Remarque : on peut m.q.  $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} c$  implique  $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} c$  (limite constante).

11/69

## Exemple « fiabilité composant » (suite)

Rappel (TCL)  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \eta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \eta^2)$ .

Puisque  $\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{ps}} \eta$  (constante), on a par le théorème de Slutsky :

$$(\sqrt{n}(\bar{X}_n - \eta), \bar{X}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} (Z, \eta) \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0, \eta^2).$$

Donc, par le théorème de continuité,

$$\sqrt{n} \frac{(\bar{X}_n - \eta)}{\bar{X}_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \frac{Z}{\eta} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

puisque  $(z, y) \mapsto \frac{z}{y}$  est continue en tout point où  $y \neq 0$ .

**Remarque.** Résultat utilisé pour construire un IC asymptotique

exercice 4

12/69

## Méthode de linéarisation (« delta méthode »)

### « Delta théorème » (cas scalaire)

Soit  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de VA à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , t.q.

$$\sqrt{n}(Y_n - m) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} Z,$$

avec  $Z$  une VA à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $m \in \mathbb{R}$ .

Alors, pour toute fonction  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable en  $m$ ,

$$\sqrt{n}(h(Y_n) - h(m)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} h'(m) Z,$$

Intuition :  $h(y) - h(m) \approx h'(m)(y - m)$ .

Démonstration

13/69



## Méthode de linéarisation (« delta méthode »)

### « Delta théorème » (cas vectoriel)

Soit  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de VA à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , t.q.

$$\sqrt{n}(Y_n - m) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} Z,$$

avec  $Z$  une VA à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et  $m \in \mathbb{R}^d$ .

Alors, pour toute fonction  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^q$  différentiable en  $m$ ,

$$\sqrt{n}(h(Y_n) - h(m)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} (Dh)(m) Z,$$

avec  $(Dh)(m)$  **matrice jacobienne** de  $h$  au point  $m$  :

$$(Dh)(m) = \left( (\partial_j h_i)(m) \right)_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq d}.$$

14/69

## Delta théorème dans le cas gaussien

### Cas scalaire.

Si  $\sqrt{n}(Y_n - m) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , alors

$$\sqrt{n}(h(Y_n) - h(m)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, (h'(m))^2 \sigma^2).$$

### Cas vectoriel

Si  $\sqrt{n}(Y_n - m) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \Sigma)$ , alors

$$\sqrt{n}(h(Y_n) - h(m)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}\left(0, (Dh)(m) \Sigma (Dh)(m)^\top\right).$$

15/69

## Exemple : « fiabilité composant ».

On a déjà vu que :

- ▶  $\hat{\theta}_n = 1/\bar{X}_n$  est un estimateur fortement consistant de  $\theta$ ,
- ▶  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \eta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \eta^2)$ , où  $\eta = \frac{1}{\theta}$ .

Delta-méthode avec  $h(\eta) = \frac{1}{\eta}$

$$\sqrt{n} \left( \frac{1}{\bar{X}_n} - \theta \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N} \left( 0, \eta^2 (h'(\eta))^2 \right),$$
$$h'(\eta) = -\frac{1}{\eta^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \theta^2).$$

Conclusion :  $\hat{\theta}_n$  est **asymptotiquement gaussien**,  
et sa **vitesse de convergence** est  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

16/69

## Comparaison asymptotique d'estimateurs (scalaires) (1/2)

A l'aide des **variances asymptotiques**.

Illustration sur l'exemple « fiabilité composant » pour  $\eta = \mathbb{E}_\theta(X_1)$ .

1) Pour  $\hat{\eta}^{(1)} = \bar{X}_n$ , on a (TCL) :  $\sqrt{n}(\hat{\eta}^{(1)} - \eta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \eta^2)$ .

2) Pour  $\hat{\eta}^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$  (cf. cours 1) ?

- ▶ Comme  $\mathbb{E}(X_1^2) = 2\eta^2$  et  $\mathbb{E}(X_1^4) = 24\eta^4$ , on a (TCL) :

$$\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\eta^2 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 20\eta^4).$$

- ▶ D'où, en utilisant la delta méthode avec  $h(z) = \sqrt{\frac{1}{2}z}$ ,

$$\sqrt{n}(\hat{\eta}^{(2)} - \eta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}\left(0, \frac{5}{4}\eta^2\right).$$

17/69

## Comparaison asymptotique d'estimateurs (scalaires) (2/2)

En résumé :

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\hat{\eta}^{(1)} - \eta) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \eta^2), \\ \sqrt{n}(\hat{\eta}^{(2)} - \eta) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}\left(0, \frac{5}{4}\eta^2\right).\end{aligned}$$

On observe que

- ▶ les deux estimateurs sont **asymptotiquement gaussiens**,
- ▶ ont la **même vitesse de convergence**,
- ▶ mais **la variance asymptotique de  $\hat{\eta}^{(1)}$  est plus faible**.

⇒ On dit que  $\hat{\eta}^{(1)}$  est **asymptotiquement préférable** à  $\hat{\eta}^{(2)}$ .

18/69

## Plan du cours

### 1 – Lois asymptotiques et vitesse de convergence

1.1 – Définitions et exemples

1.2 – Outils théoriques

1.3 – Efficacité asymptotique

### 2 – Régions et intervalles de confiance

### 3 – Exercices types

### 4 – Annexes

## Efficacité asymptotique

Rappel (borne de Cramér-Rao pour un paramètre scalaire) :

$\forall \hat{\theta}$  ESB régulier de  $\theta$ ,  $\forall \theta \in \Theta$ ,

$$R_{\theta}(\hat{\theta}) = \text{var}_{\theta}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{n} I_1^{-1}(\theta),$$

avec  $I_1(\theta) = \text{var}_{\theta}(S_{\theta}(X_1))$ .

⇒ Si l'égalité est atteinte, alors  $\hat{\theta}$  est dit **efficace**.

## Efficacité asymptotique

**Définition.** Un estimateur est dit **asymptotiquement efficace** si

- ▶ il est asymptotiquement normal à la vitesse  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ,
- ▶ avec pour variance asymptotique  $I_1^{-1}(\theta)$ .

Remarque : définition valable également dans le cas vectoriel, en remplaçant la variance par la matrice de covariance.

19/69

## Efficacité asymptotique de l'EMV

Contexte :  $X_1, X_2, \dots \stackrel{\text{iid}}{\sim} P_{\theta}$  et,  $\forall \theta \in \Theta$ ,  $P_{\theta}$  admet une densité  $f_{\theta}$ .

### Définition : modèle régulier

Le modèle statistique est dit **régulier** si

- ▶ les conditions  $C_0$ – $C_2$  sont vérifiées (déf. données au cours 2)
- ▶ les **conditions  $C_3$  &  $C_4$  sont vérifiées** ⇒ Conditions  $C_3$  &  $C_4$
- ▶  $\forall \theta \in \Theta$ , l'information de Fisher  $I_1(\theta)$  est définie positive.

### Théorème

Si le modèle statistique est **régulier** et si l'EMV  $\hat{\theta}_n$  est **consistant**, alors il est **asymptotiquement efficace** :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, I_1^{-1}(\theta)).$$

## Information de Fisher dans les modèles réguliers

**Rappel.** L'**information de Fisher** apportée par  $\underline{X}$  est la matrice

$$I(\theta) = \text{var}_\theta(S_\theta) = \mathbb{E}_\theta \left( S_\theta S_\theta^\top \right).$$

### Proposition : autre expression de l'information de Fisher

Dans un modèle régulier, on a l'égalité

$$I(\theta) = -\mathbb{E}_\theta \left( \nabla_\theta \left( S_\theta^\top \right) \right), \quad (\star)$$

Autrement dit :  $\forall \theta \in \Theta, \forall j \leq p, \forall k \leq p,$

$$(I(\theta))_{j,k} = -\mathbb{E}_\theta \left( \frac{\partial}{\partial \theta_j} S_\theta^{(k)} \right) = -\mathbb{E}_\theta \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \ln f_\theta(\underline{X}) \right).$$

Remarque : en fait, si  $C_0$ – $C_3$  sont vérifiées, alors  $C_4$  et  $(\star)$  sont équivalents.

21/69

## Exemple : « fiabilité composant » (suite)

Question :  $\hat{\theta}_n = 1/\bar{X}_n$  est-il **asymptotiquement efficace** ?

On a déjà calculé le score :  $S_\theta(X_1) = \frac{1}{\theta} - X_1$ .

Calcul de l'**information de Fisher** (deux approches) :

Calcul de  $\mathbb{E}_\theta (S_\theta(X_1)^2)$

$$I_1(\theta) = \text{var}_\theta(X_1) = \eta^2 = \frac{1}{\theta^2}$$

Calcul de  $-\mathbb{E}_\theta \left( \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}(X_1) \right)$

$$I_1(\theta) = -\mathbb{E}_\theta \left( -\frac{1}{\theta^2} \right) = \frac{1}{\theta^2}$$

Conclusion : puisque  $\sqrt{n} \left( \frac{1}{\bar{X}_n} - \theta \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \theta^2),$

$\hat{\theta}_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$  est **asymptotiquement efficace**.

⇒ On retrouve le résultat du théorème ( $C_0$ – $C_4$  sont vérifiées).

22/69

## Plan du cours

1 – Lois asymptotiques et vitesse de convergence

2 – Régions et intervalles de confiance

2.1 – Définition et exemple

2.2 – Intervalle de confiance exact

2.3 – Intervalle de confiance asymptotique

3 – Exercices types

4 – Annexes

## Plan du cours

1 – Lois asymptotiques et vitesse de convergence

2 – Régions et intervalles de confiance

2.1 – Définition et exemple

2.2 – Intervalle de confiance exact

2.3 – Intervalle de confiance asymptotique

3 – Exercices types

4 – Annexes

## Motivation

### Problème

Un estimateur ponctuel commet nécessairement une **erreur d'estimation**.

Comment « rendre compte » de cette erreur ?

Deux approches :

- ▶ fournir en plus de la valeur estimée,
  - ▶ la **loi de l'estimateur**  $\hat{\eta}$ , exacte ou approchée,
  - ▶ ou au moins une « mesure de dispersion » (par ex. son écart-type) ;
- ▶ donner, plutôt qu'une estimation ponctuelle  $\hat{\eta}$ ,  
un **intervalle de confiance** pour  $\eta$ .

23/69

## Taux de couverture

**Rappel.**  $\eta = g(\theta)$ .

Soient

- ▶  $\mathcal{P}(N)$  l'ensemble des parties de  $N = g(\Theta)$ ,
- ▶  $C(\underline{X})$  une statistique à valeurs dans  $\mathcal{P}(N)$ .

**Souhait.** Que  $C(\underline{X})$  contienne  $\eta$  avec une forte probabilité.

### Définition

Pour  $\theta \in \Theta$ , le **taux de couverture** de  $C(\underline{X})$  pour  $\eta$  est défini par :

$$\mathbb{P}_{\theta}(\eta \in C(\underline{X}))$$

⚠ En général, le taux de couverture dépend de la loi sous-jacente, c'est-à-dire de  $\theta$ .

24/69

## Régions et intervalles de confiance

On cherche à contrôler le taux de couverture.

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ .

**Définition :** région de confiance de **niveau**  $1 - \alpha$

Une **région de confiance de niveau (au moins)  $1 - \alpha$**  pour  $\eta$  est une statistique  $C(\underline{X})$  à valeurs dans  $\mathcal{P}(N)$  telle que :

$$\forall \theta \in \Theta, \quad \mathbb{P}_{\theta}(\eta \in C(\underline{X})) \geq 1 - \alpha.$$

On dit que  $C(\underline{X})$  est de niveau **exactement**  $1 - \alpha$  si

$$\forall \theta \in \Theta, \quad \mathbb{P}_{\theta}(\eta \in C(\underline{X})) = 1 - \alpha.$$

(On dit aussi : de « taille »  $1 - \alpha$ .)

**Cas scalaire.** Si  $C(\underline{X})$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on parle d'**intervalle de confiance**.

25/69

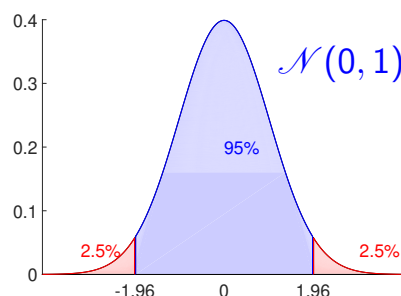
## Exemple : $n$ -échantillon $\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$ , avec $\sigma_0^2$ connu

Comme  $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$ ,  $T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_0} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , donc pour  $\alpha = 5\%$  :

$$\mathbb{P}_{\mu}\left(\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_0} \in [-1.96, 1.96]\right) \approx 1 - \alpha = 95\%,$$

où 1.96 est le quantile d'ordre 97.5% de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

def. : quantile



On “pivote” pour obtenir un **IC de niveau exactement 95%** :

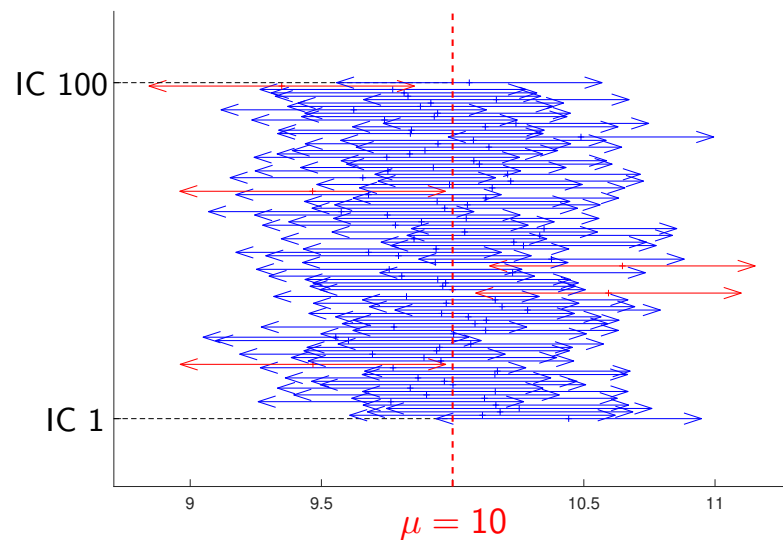
$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_0} \in [-1.96, 1.96] \quad \Leftrightarrow \quad \mu \in C(\underline{X}) = \left[ \bar{X} - 1.96 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right].$$

26/69



## Interprétation : simulations

On simule 100 réalisations avec  $\mu = 10$  et  $\sigma_0 = 1$ .



En rouge : les réalisations où l'IC ne contient pas  $\mu = 10$ .

➡ La proportion des cas où l'IC qui ne contient pas  $\mu$  est (environ)  $\alpha$ .

27/69

## Plan du cours

1 – Lois asymptotiques et vitesse de convergence

2 – Régions et intervalles de confiance

2.1 – Définition et exemple

2.2 – Intervalle de confiance exact

2.3 – Intervalle de confiance asymptotique

3 – Exercices types

4 – Annexes

## Loi libre et fonction pivotale

La démarche peut être formalisée avec la notion de **fonction pivotale**.

### Définitions

Une fonction

$$T : \underline{\mathcal{X}} \times N \rightarrow \mathbb{R}$$

est dite **pivotale** si la loi de la variable aléatoire  $T = T(\underline{X}, \eta)$  **ne dépend pas de  $\theta$** . On dit que la loi de  $T(\underline{X}, \eta)$  est **libre**.

Retour sur l'**exemple** :  $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$  avec  $\sigma_0$  connu.

Alors  $T = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma_0}$  est pivotale puisque

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma_0} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Remarque : on peut aussi choisir  $T = \sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$ .

28/69

## Rappel de proba : quantiles

### Définition : quantile d'ordre $r$

Soit  $F(x)$  la fonction de répartition d'une loi sur  $\mathbb{R}$ .

Pour  $0 < r < 1$ , le **quantile d'ordre  $r$**  de la loi est défini par :

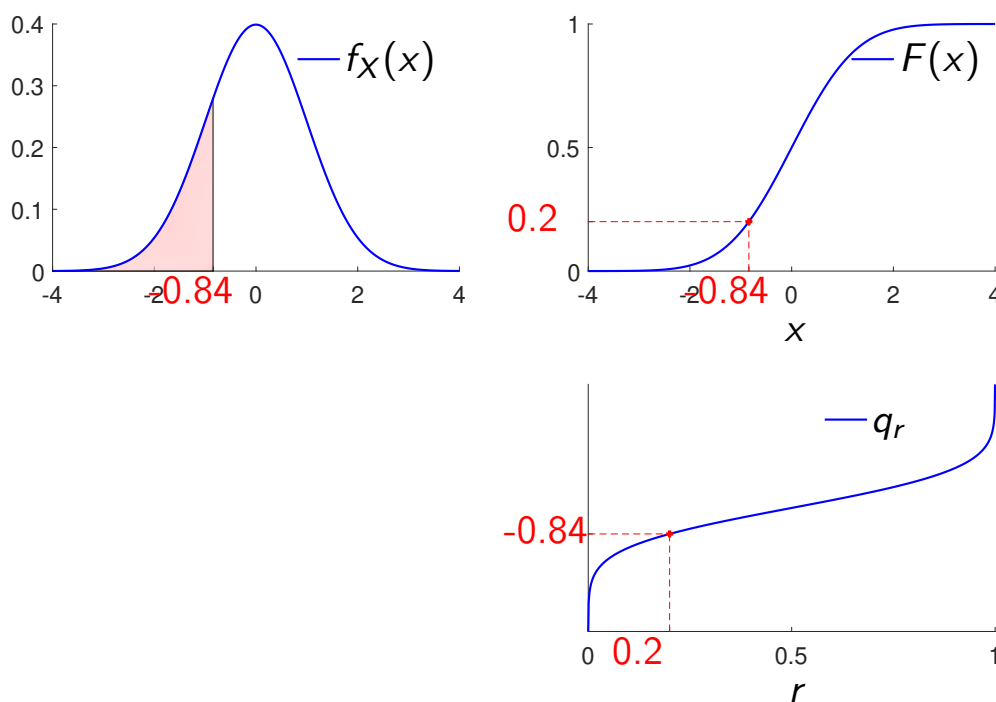
$$q_r = \inf \{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq r\} = \min \{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq r\}.$$

Propriétés :

- ▶ Si  $F$  est continue, alors  $F(q_r) = r$ .
- ▶ Si de plus  $F$  est strictement croissante, alors  $q_r = F^{-1}(r)$ .

29/69

## Fonction quantile de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$



30/69

## Utilisation des fonctions pivotales

Soient  $T(\underline{X}, \eta)$  une fonction pivotale et  $\alpha \in ]0, 1[$ .

### Proposition

Supposons la fonction de répartition  $F$  de  $T(\underline{X}, \eta)$  continue et strictement croissante, et notons  $q_r = F^{-1}(r)$  le quantile d'ordre  $r$ .

Alors, pour tout  $\gamma \in [0, \alpha]$  :

$$\begin{aligned} C^\gamma(\underline{X}) &= \{\eta \in N \text{ tel que } q_\gamma \leq T(\underline{X}, \eta) \leq q_{\gamma+1-\alpha}\} \\ &= T^{-1}(\underline{X}, [q_\gamma, q_{\gamma+1-\alpha}]) \end{aligned}$$

est un intervalle de confiance pour  $\eta$  de niveau exactement  $1 - \alpha$ .

**Démonstration.**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta(g(\theta) \in C^\gamma(\underline{X})) &= \mathbb{P}_\theta(q_\gamma \leq T(\underline{X}, \eta) \leq q_{\gamma+1-\alpha}) \\ &= F(q_{\gamma+1-\alpha}) - F(q_\gamma) = 1 - \alpha \end{aligned}$$

31/69

## Exemple : $n$ -échantillon $\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$ , avec $\sigma_0^2$ connu

Considérons à nouveau la fonction pivotale

$$T(\underline{X}, \mu) = \sqrt{n} \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma_0} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Pour tout  $\gamma \leq \alpha$ , on obtient un IC de niveau (exactement)  $1 - \alpha$  :

$$C^\gamma = \left[ \bar{X} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha+\gamma}, \quad \bar{X} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} q_\gamma \right],$$

avec  $q_r$  le quantile d'ordre  $r$  de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

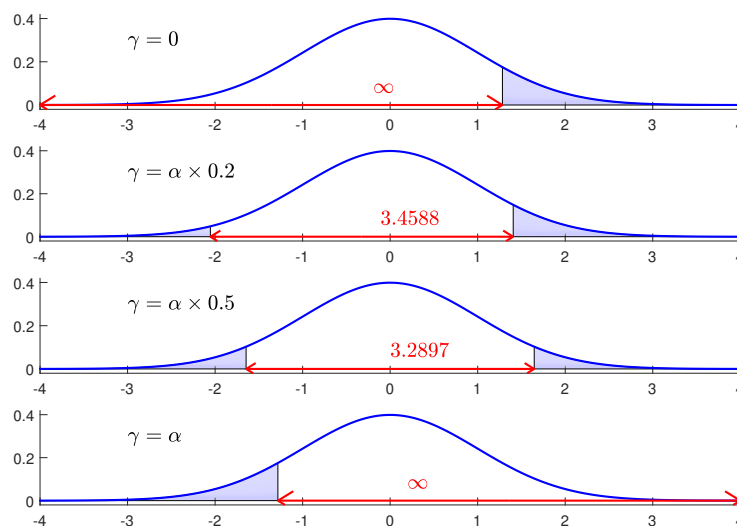
Par exemple, avec  $\gamma = \frac{\alpha}{2}$  et  $\alpha = 0.05$  :

$$-q_{1-\alpha+\gamma} = -q_{0.975} \approx -1.96$$

$$-q_\gamma = -q_{0.025} \approx +1.96$$

32/69

## Choix du paramètre $\gamma$



Densité de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et quantiles associés pour  $\alpha = 0.1$  et plusieurs valeurs de  $\gamma$  (valeurs en rouge :  $q_{\gamma+1-\alpha} - q_\gamma$ ).

Critère usuel : valeur t.q. l'IC soit de longueur minimale (ici  $\gamma = \frac{\alpha}{2}$ ).

33/69

## Exemple : « fiabilité composant » (suite)

On peut montrer que :

$$T(\underline{X}, \eta) = \frac{\bar{X}}{\eta} \sim \Gamma(n, n).$$

D'où un IC de niveau (exactement)  $1 - \alpha$  pour  $\eta$  :

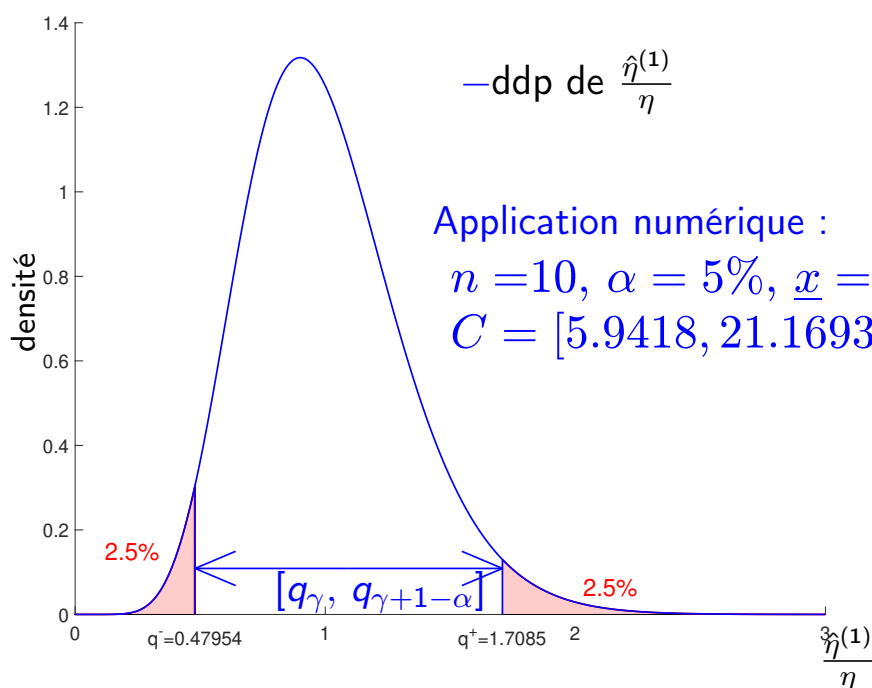
$$C^\gamma = \left[ \frac{\bar{X}}{q_{\gamma+1-\alpha}}, \frac{\bar{X}}{q_\gamma} \right],$$

avec  $q_r$  le quantile d'ordre  $r$  de la loi  $\Gamma(n, n)$ .

Choix de  $\gamma$  : on peut prendre  $\gamma = \frac{\alpha}{2}$  par simplicité, ou chercher numériquement  $\gamma$  tel que la longueur  $1/q_\gamma - 1/q_{1+\gamma-\alpha}$  soit minimale.

34/69

## Exemple : « fiabilité composant » (suite)



Densité de la loi pivotale  $\Gamma(n, n)$   
 et quantiles associés pour  $\alpha = 0.05$  et  $\gamma = \frac{\alpha}{2}$ .

35/69

# Plan du cours

1 – Lois asymptotiques et vitesse de convergence

2 – Régions et intervalles de confiance

2.1 – Définition et exemple

2.2 – Intervalle de confiance exact

2.3 – Intervalle de confiance asymptotique

3 – Exercices types

4 – Annexes

## Motivation et objectif

### Problème

Il est parfois (souvent) **difficile de trouver une fonction pivotale.**

Solution : recourir à nouveau à une **approche asymptotique.**

- ▶ Obtention d'intervalles « approximatifs ».
- ▶ Calculs facilités grâce aux outils déjà introduits  
(TCL, Slutsky, delta méthode. . .).



Toute analyse menée dans le cadre asymptotique est

**approximative lorsque  $n$  est fini.**

➡ Les résultats obtenus peuvent être mauvais pour  $n$  petit. . .

## Région (intervalle) de confiance asymptotique

On note  $\underline{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ . Rappel :  $\eta = g(\theta)$  et  $N = g(\Theta)$ .

### Définition : région de confiance asymptotique

Une **région de confiance asymptotique de niveau (au moins)  $1 - \alpha$**  est une statistique  $C_n(\underline{X}_n)$  à valeurs dans  $\mathcal{P}(N)$ , telle que

$$\forall \theta \in \Theta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\theta(g(\theta) \in C_n(\underline{X}_n)) \geq 1 - \alpha.$$

(variante : « exactement » si égalité pour tout  $\theta$ .)

Rappel : pour une RC « exacte » de niveau (au moins)  $1 - \alpha$ ,

$$\forall \theta \in \Theta, \quad \mathbb{P}_\theta(g(\theta) \in C_n(\underline{X}_n)) \geq 1 - \alpha$$

(ici « exacte » signifie « non asymptotique »).

37/69

## Construction d'intervalles de confiance asymptotique

On a recours aux **fonctions pivotales asymptotiques**.

Leur utilisation est illustrée pour :

- ▶ le **paramètre d'une loi de Rayleigh**

||| exercice 3

Il s'agit d'un exercice mêlant **définitions** et questions.


- ▶ l'**application « fiabilité composant »**

||| exercice 4

On montre que

$$C_n = \left[ \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \bar{X}_n, \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \bar{X}_n \right]$$

est un IC asymptotique de niveau  $1 - \alpha$  pour  $\eta$  où  $q_r$  est le quantile d'ordre  $r$  de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

 La construction d'IC asymptotique est au programme du cours (et de l'examen).

38/69

## Conclusion du cours et transition vers la séquence suivante

### Nous avons vu et développerons en TD 3 :

- ▶ des outils pour établir la convergence en loi et la vitesse de convergence d'une suite d'estimateurs,
- ▶ l'utilisation de la loi (asymptotique) d'une suite d'estimateurs pour construire des intervalles ou régions de confiance.

### Nous traiterons dans la séquence 4 :

- ▶ de la prise de décision par un test d'hypothèses statistique,
- ▶ de la construction d'un tel test,
- ▶ des risques associés à une telle décision.

39/69

## Plan du cours

1 – Lois asymptotiques et vitesse de convergence

2 – Régions et intervalles de confiance

3 – Exercices types

3.1 – Énoncés

3.2 – Corrigés

4 – Annexes



# Plan du cours

1 – Lois asymptotiques et vitesse de convergence

2 – Régions et intervalles de confiance

3 – Exercices types

3.1 – Énoncés

3.2 – Corrigés

4 – Annexes

## Exercice 1 (Estimation de la probabilité d'un évènement)

corrigé

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de VA iid à valeurs dans  $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ .

Pour un  $A \in \mathcal{A}$  donné, on estime  $\eta = \mathbb{P}(X_1 \in A)$  à l'aide de la fonction indicatrice :

$$\hat{\eta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i \in A}.$$

### Question

Etudier le comportement asymptotique de  $\hat{\eta}_n$ .

## Exercice 2 (Loi asymptotique)

corrigé

Soient  $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(\theta)$ , avec  $\theta > 0$ .

Soit  $\eta$  la probabilité de dépasser un seuil  $x_0 > 0$  donné :

$$\eta = \mathbb{P}_\theta(X \geq x_0) = \exp(-\theta x_0).$$

### Questions

- ❶ Étudier le comportement asymptotique de la moyenne empirique  $\bar{X}_n$ .
- ❷ Proposer un estimateur  $\hat{\eta}_n^{(1)}$  fonction de  $\bar{X}_n$ , par substitution.
- ❸ Étudier le comportement asymptotique de  $\hat{\eta}_n^{(1)}$ .
- ❹ Soit  $\hat{\eta}_n^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i \geq x_0}$ . L'un des deux estimateurs est-il asymptotiquement préférable à l'autre ?

41/69

## Exercice 3 (Loi de Rayleigh : IC asymptotique)

corrigé

Il s'agit d'un exercice long qui aborde la notion **d'intervalle de confiance asymptotique**.

Soient  $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{R}(\sigma^2)$ , avec  $\sigma^2 > 0$ .

Loi de Rayleigh

Les questions ❶-❸ détaillent l'obtention d'IC asymptotique à l'aide de **fonctions pivotales asymptotiques**.

Les questions ❹-❺ illustrent la notion de **taux de couverture** appliquée au contexte des IC asymptotiques.

42/69

## Définition

Une (suite de) fonction(s)

$$T_n : \mathcal{X}^n \times N \rightarrow \mathbb{R}$$

est une **fonction pivotale asymptotique** si la loi **limite** de  $T_n(\underline{X}_n, \eta)$  ne dépend pas de  $\theta$  :

$$T_n(\underline{X}_n, \eta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} T_\infty.$$

où  $T_\infty$  est une VA dont la loi est libre.

Définition donnée avec les notations du cours

➡ Dans le cadre de l'exercice,  $\eta = \theta = \sigma^2$ .

## Utilisation des fonctions pivotales asymptotiques :

- ➡ Identique à celle des fonctions pivotales dans le cas exact !
- ➡ Les intervalles obtenus sont des **intervalles de confiance asymptotique**.

## Questions

- ① Déterminer la loi asymptotique de  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
- ② En utilisant la loi asymptotique de  $\bar{X}_n$ , proposer une fonction pivotale asymptotique,
- ③ en déduire un intervalle de confiance asymptotique de niveau  $1 - \alpha$ .

## Exercice 3 (Loi de Rayleigh : IC asymptotique)

corrigé

Rappel : le **taux de couverture** d'un IC est son niveau **réel**.

Le calcul du taux de couverture de  $C_n(\underline{X}_n)$  nécessite de manipuler la **Fonction de répartition (FR)** de  $T_n$ .

Ici,  $T_n$  dépend de  $\bar{X}_n$  dont la loi n'est pas une loi standard.

➡ sa FR est cependant accessible numériquement.

### Questions

- ④ Montrer que  $\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{SR}(n, 1)$

où  $F^{(n)}$  est la FR de la loi  $\mathcal{SR}(n, 1)$ .

➡ Somme de lois de Rayleigh

- ⑤ Exprimer le taux de couverture de  $C_n(\underline{X}_n)$  à l'aide de  $F^{(n)}$ .

45/69

## Exercice 4 (IC asymptotique Fiabilité composant)

corrigé

Contexte de l'application « Fiabilité composant »

➡  $(X_1, \dots, X_n) \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(\theta)$  et  $\eta = \frac{1}{\theta}$

### Questions

- ① Montrer que

$$T_n = \sqrt{n} \frac{(\bar{X}_n - \eta)}{\bar{X}_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1).$$

est une fonction pivotale asymptotique (voir exercice 3 pour une définition de ce terme).

- ② Utiliser cette fonction pivotale pour construire un IC asymptotique de niveau  $1 - \alpha$ .
- ③ Exprimer la couverture de l'IC asymptotique obtenu.

➡ retour au slide 38

46/69

# Plan du cours

1 – Lois asymptotiques et vitesse de convergence

2 – Régions et intervalles de confiance


3 – Exercices types

3.1 – Énoncés

3.2 – Corrigés

4 – Annexes

## Corrigé de l'exercice 1

 retour au sujet

En appliquant le TCL à  $Y_i = \mathbb{1}_{X_i \in A} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Ber}(\eta)$  :

$$\sqrt{n}(\hat{\eta}_n - \eta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \eta(1 - \eta)).$$

Concl. : si  $0 < \eta < 1$ , alors  $\hat{\eta}_n$  est **asymptotiquement gaussien**, avec

- ▶ vitesse de convergence :  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ,
- ▶ variance asymptotique :  $\eta(1 - \eta)$ .

❶ Appliquant le TCL :

$$\sqrt{n} \left( \bar{X}_n - \frac{1}{\theta} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N} \left( 0, \frac{1}{\theta^2} \right)$$

❷  $\eta = \exp \left( -\frac{x_0}{\frac{1}{\theta}} \right) = h \left( \frac{1}{\theta} \right)$

avec  $h : u \mapsto \exp \left( -\frac{x_0}{u} \right)$  continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Utilisant la méthode de substitution à  $\bar{X}_n$  estimateur de  $\frac{1}{\theta}$  :

$$\hat{\eta}_n^{(1)} = h(\bar{X}_n) = \exp \left( -\frac{x_0}{\bar{X}_n} \right)$$

❸  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  avec  $h'(u) = \frac{x_0}{u^2} \exp \left( -\frac{x_0}{u} \right)$ .

Appliquant le Delta théorème dans le contexte gaussien :

$$\sqrt{n} \left( h(\bar{X}_n) - h \left( \frac{1}{\theta} \right) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N} \left( 0, h' \left( \frac{1}{\theta} \right)^2 \frac{1}{\theta^2} \right)$$

Soit :

$$\sqrt{n} \left( \hat{\eta}_n^{(1)} - \eta \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N} \left( 0, (x_0 \theta \exp(-\theta x_0))^2 \right)$$

La variance asymptotique de  $\hat{\eta}_n^{(1)}$  est  $\sigma_1^2(\theta) = (x_0 \theta \exp(-\theta x_0))^2$ .

$$\textcircled{4} \hat{\eta}_n^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \text{ avec } Z_i = \mathbb{1}_{X_i \geq x_0} \implies \begin{cases} Z_1, \dots, Z_n \text{ IID} \\ Z_1 \sim \text{Ber}(\eta) \end{cases}$$

Utilisant le résultat de l'exercice 1 :

[Exercice 1](#)

$$\sqrt{n} \left( \hat{\eta}_n^{(2)} - \eta \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \eta(1 - \eta))$$

avec  $\eta = \exp(-\theta x_0)$ , on obtient la variance asymptotique :

$$\sigma_2^2(\theta) = \exp(-\theta x_0) (1 - \exp(-\theta x_0)).$$

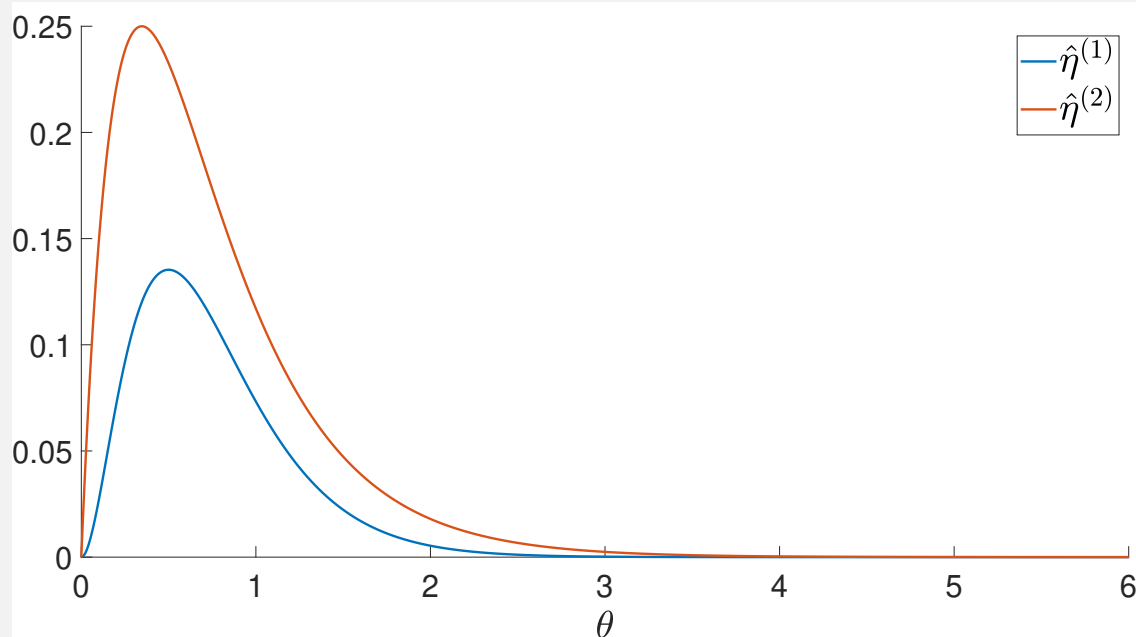
Soit  $\Delta(\theta) = \sigma_2^2(\theta) - \sigma_1^2(\theta)$ .

$$\begin{aligned} \Delta(\theta) &= \exp(-\theta x_0) (1 - \exp(-\theta x_0) - x_0^2 \theta^2 \exp(-\theta x_0)) \\ &= \exp(-\theta x_0) \varphi(\theta x_0) \end{aligned}$$

avec  $\varphi(u) = 1 - \exp(-u)(1 + u^2)$ .

Un tableau de variation de  $\varphi$  montre que  $\varphi > 0$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

$\hat{\eta}_n^{(1)}$  est donc asymptotiquement préférable à  $\hat{\eta}_n^{(2)}$ .



Tracés des 2 variances asymptotiques pour  $x_0 = 2.0$ .

52/69

❶ Par application directe du TCL :

$$\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N} \left( 0, \sigma^2 \left( 2 - \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

$$\sqrt{n} \left( \frac{\frac{\bar{X}_n}{\sigma} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N} (0, 1).$$

❷ Ainsi :

$$T_n = \sqrt{n} \left( \frac{\frac{\bar{X}_n}{\sigma} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}} \right) \text{ est une fonction pivotale asymptotique.}$$

53/69



❸ Comme  $T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$ , il vient avec un niveau  $1 - \alpha$  :

$$-q_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n} \left( \frac{\frac{\bar{X}_n}{\sigma} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}} \right) \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

où  $q_r$  est le quantile d'ordre  $r$  de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

D'où l'intervalle de confiance asymptotique de niveau  $1 - \alpha$  :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \bar{X}_n \frac{1}{1 + \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \bar{X}_n \frac{1}{1 - \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}}$$

On peut simplifier l'IC asymptotique en effectuant un développement limité :

IC asymptotique de niveau  $1 - \alpha$  pour  $\sigma$

$$C_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \bar{X}_n \left[ 1 - \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}, 1 + \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1} \right]$$

## Corrigé de l'exercice 3

[retour au sujet](#)

④  $X_i \sim \mathcal{R}(\sigma^2)$ .  $\sigma$  étant un paramètre d'échelle :  $\frac{X_i}{\sigma} \sim \mathcal{R}(1)$ .

Les  $X_i$  étant IID, il vient  $\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{SR}(n, 1)$ .

⑤ Taux de couverture de  $C_n(\underline{X}_n)$

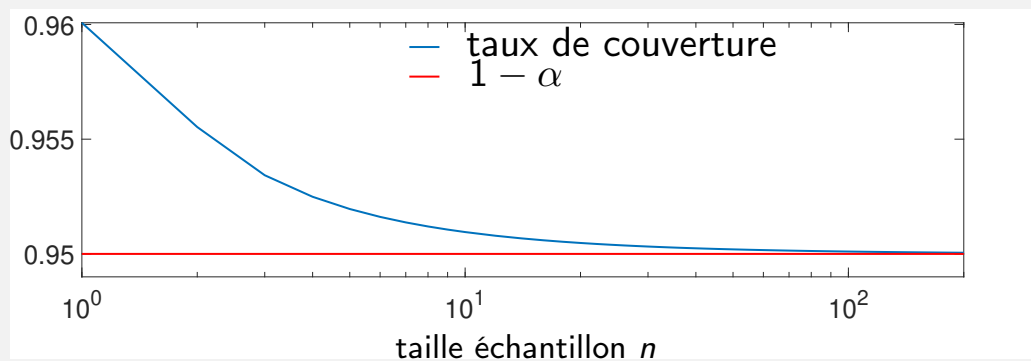
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\theta(\sigma \in C_n(\underline{X}_n)) &= \mathbb{P}_\theta\left(a_n \leq \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_i \leq b_n\right) \\ &= F^{(n)}(b_n) - F^{(n)}(a_n)\end{aligned}$$

$$\text{avec } \begin{cases} a_n &= n\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{n}\sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}q_{1-\frac{\alpha}{2}} \\ b_n &= n\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{n}\sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}q_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

**Remarque.** Ici le taux de couverture ne dépend pas de  $\theta$ .  
C'est un cas particulier car  $\sigma$  est un paramètre d'échelle.

56/69

## Corrigé de l'exercice 3

[retour au sujet](#)

Taux de couverture de l'IC asymptotique  $C_n(\underline{X}_n)$  avec  $\alpha = 5\%$ .

**Remarque.** On observe qu'on a bien un intervalle de confiance de niveau asymptotique (exactement)  $1 - \alpha$  :

$$\forall \theta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\theta(\sigma \in C_n(\underline{X}_n)) = 1 - \alpha.$$

57/69

❶ On a montré dans le cours (TCL, Slutski, Mann-Wald) que

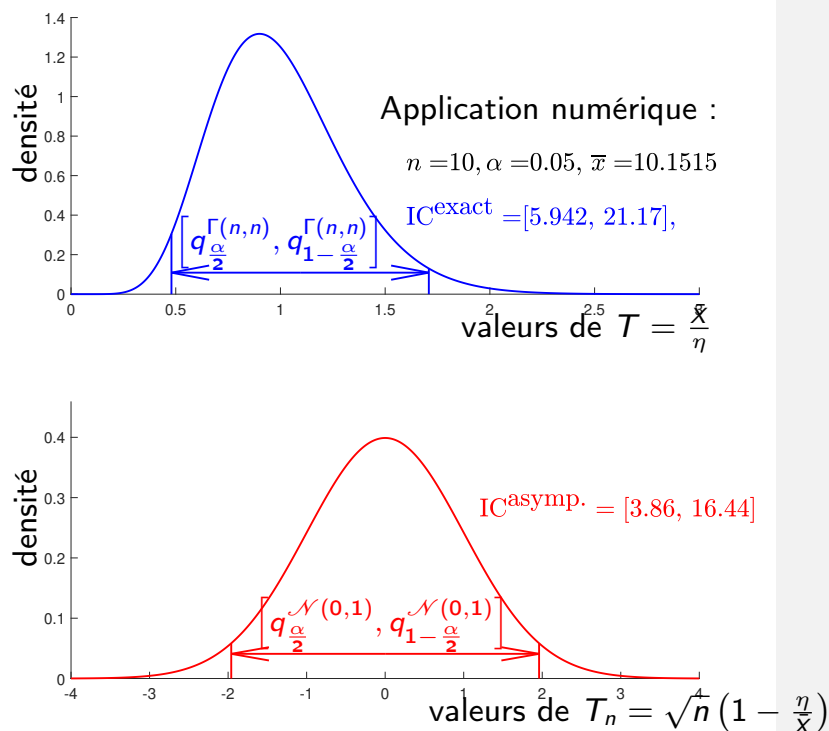
$$T_n(\underline{X}_n, \eta) = \sqrt{n} \frac{(\bar{X}_n - \eta)}{\bar{X}_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

⇒  $T_n$  est donc une fonction pivotale asymptotique.

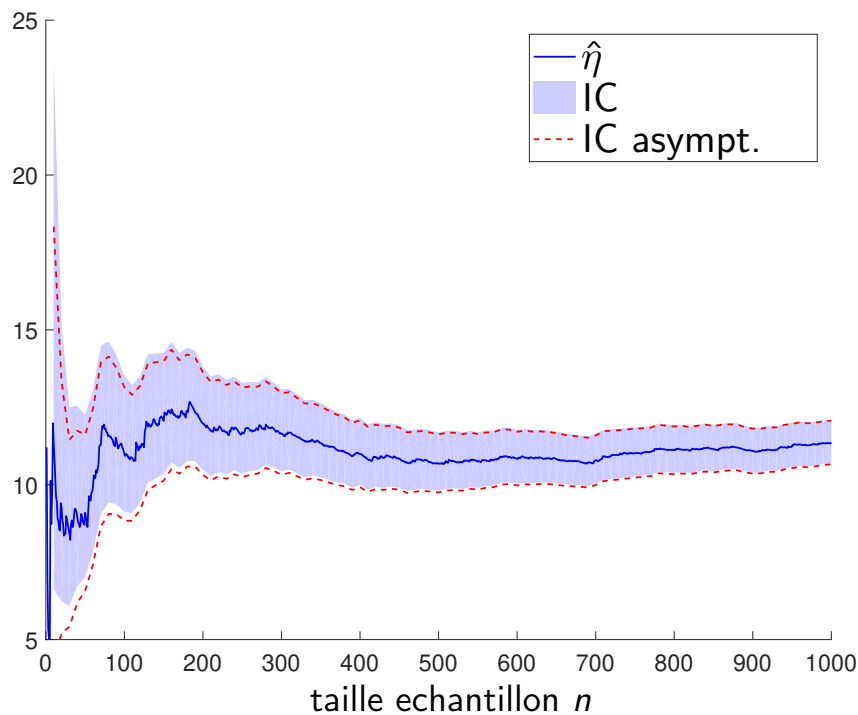
❷ IC asymptotique de niveau  $1 - \alpha$  pour  $\eta$  :

$$C_n = \left[ \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \bar{X}_n, \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \bar{X}_n \right]$$

où  $q_r$  est le quantile d'ordre  $r$  de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .



⚠ Ne pas confondre les intervalles sur les fonctions pivotales  $[q_{\frac{\alpha}{2}}, q_{1-\frac{\alpha}{2}}]$  et les intervalles de confiance sur  $\eta$ .

Comparaison des IC exact et asymptotique en fonction de  $n$ 

60/69

**③** Taux de couverture de  $C_n(\underline{X}_n)$ 

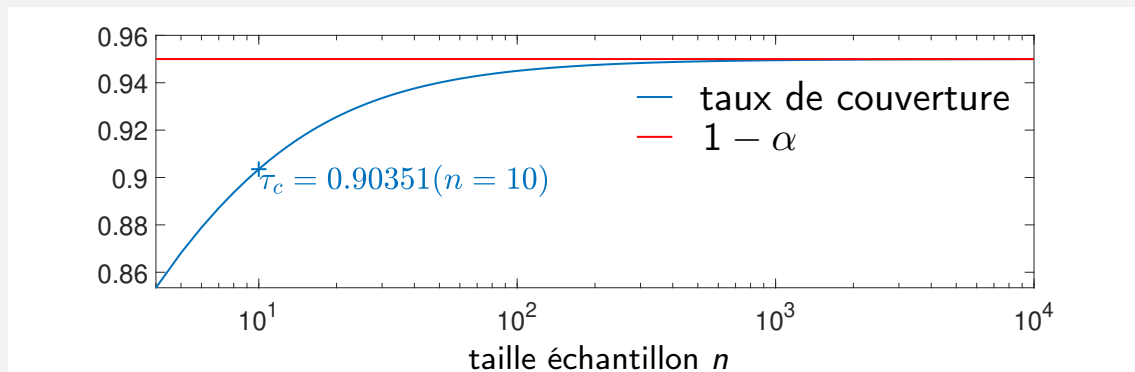
$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta(\eta \in C_n(\underline{X}_n)) &= \mathbb{P}_\theta\left(\eta \in \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right), \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right] \bar{X}_n\right) \\ &= \mathbb{P}_\theta\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \frac{\bar{X}_n}{\eta} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) \end{aligned}$$

Comme (rappel)  $\frac{\bar{X}_n}{\eta} \sim \Gamma(n, n)$ , il vient :

$$\mathbb{P}_\theta(\eta \in C_n(\underline{X}_n)) = F^{\Gamma(n,n)}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) - F^{\Gamma(n,n)}\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

avec  $F^{\Gamma(n,n)}$  fonction de répartition de la loi  $\Gamma(n, n)$ .

61/69



Taux de couverture de l'IC asympt. de niveau 95%

**Remarques.**

- ▶ On retrouve que  $\forall \theta, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\theta (\eta \in C_n(\underline{X}_n)) \geq 1 - \alpha$ .
- ▶ En général le taux de couverture dépend de  $\theta$ . Ici, ce n'est pas le cas car  $\eta$  est un paramètre d'échelle.

62/69

## Plan du cours

- 1 – Lois asymptotiques et vitesse de convergence
- 2 – Régions et intervalles de confiance
- 3 – Exercices types
- 4 – Annexes

## Démonstration

$Z$  admet un moment d'ordre 2. On peut donc définir :

- ▶ sa moyenne  $\mu = \mathbb{E}(Z)$ ,
- ▶ sa matrice de covariance  $\Sigma_Z = \mathbb{E}((Z - \mu)(Z - \mu)^\top)$ .

Commençons par remarquer que s'il existe  $a \in \mathbb{R}^q \setminus \{0\}$  et  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $a^\top Z = c$  p.s., alors  $c = a^\top \mu$ .

### Un résultat intermédiaire

Soit  $V$  variable aléatoire scalaire **positive**. On a :

$$\mathbb{E}(V) = 0 \iff V = 0 \text{ p.s.} \quad (*)$$

63/69

## Démonstration (suite)

Soient  $a \in \mathbb{R}^q \setminus \{0\}$  et  $c \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} a^\top Z = c \text{ p.s.} &\iff a^\top (Z - \mu) = 0 \text{ p.s.} \\ &\iff a^\top (Z - \mu)(Z - \mu)^\top a = 0 \text{ p.s.} \\ &\iff \mathbb{E}(a^\top (Z - \mu)(Z - \mu)^\top a) = 0 \text{ (utilisant } (*)) \\ &\iff a^\top \Sigma_Z a = 0 \end{aligned}$$

La matrice  $\Sigma_Z$  étant définie positive,  $a^\top \Sigma_Z a = 0$  (avec  $a \neq 0$ ) signifie que  $a \in \text{Ker}(\Sigma_Z)$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} Z \text{ dégénérée} &\iff \exists a \neq 0 \text{ t.q. } a^\top Z = c \text{ p.s.} \\ &\iff \exists a \neq 0 \in \text{Ker}(\Sigma_Z) \\ &\iff \Sigma_Z \text{ non inversible} \end{aligned}$$

□

## Lien entre convergence en loi et en probabilité

On sait déjà que la convergence en probabilité entraîne la convergence en loi.  
Soit  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de VA à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ .

### Proposition

Si  $Y_n \xrightarrow{\text{loi}} c$ , avec  $c \in \mathbb{R}^d$  une constante, alors  $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ .

### Corollaire

S'il existe  $c \in \mathbb{R}^d$ ,

- ▶ une VA  $Z$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ ,
- ▶ une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  à valeurs réelles et telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,

tels que

$$a_n (Y_n - c) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} Z$$

alors

$$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} c.$$

Démo. (exercice) : combiner la prop. ci-dessus et le thm de Slutsky (voir plus loin).  $\square$

 retour au slide ??

65/69

## Démonstration « delta théorème » (cas scalaire)

Soit la fonction  $\psi$  définie par :

$$\psi(y) = \begin{cases} \frac{h(y) - h(m)}{y - m} & \text{si } y \neq m, \\ h'(m) & \text{si } y = m; \end{cases}$$

$\psi$  est continue en  $m$  car  $h$  est dérivable en  $m$ . Comme  $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} m$ ,

$$\psi(Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \psi(m) = h'(m),$$

et donc (Slutsky)

$$(\sqrt{n}(Y_n - m), \psi(Y_n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} (Z, h'(m)).$$

Finalement, on a

$$\sqrt{n}(h(Y_n) - h(m)) = \sqrt{n}(Y_n - m) \psi(Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} h'(m) Z. \quad \square$$

 retour au slide ??

66/69

## Modèles réguliers : conditions de régularité $C_3$ et $C_4$

Rappel :  $C_0$ ,  $C_1$  et  $C_2$  ont été définies au cours précédent.

### Condition de régularité $C_3$

$\theta \mapsto f_\theta(\underline{x})$  est deux fois continûment différentiable  $\nu$ -presque pour tout  $\underline{x}$ .

### Condition de régularité $C_4$

En tout point  $\theta \in \Theta$ , on a

$$\int_S \nabla_\theta \nabla_\theta^\top f_\theta(\underline{x}) \nu(d\underline{x}) = \nabla_\theta \int_S \nabla_\theta^\top f_\theta(\underline{x}) \nu(d\underline{x}).$$

Autrement dit :  $\forall \theta \in \Theta, \forall k \leq p, \forall j \leq p,$


$$\int_S \frac{\partial^2 f_\theta(\underline{x})}{\partial \theta_k \partial \theta_j} \nu(d\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial \theta_k} \int_S \frac{\partial f_\theta(\underline{x})}{\partial \theta_j} \nu(d\underline{x}).$$

[retour au slide 20](#)

67/69

## Exemple d'EMV non asymptotiquement gaussien

Soient  $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{U}_{[0, \theta]}$ , avec  $\theta > 0$  inconnu.

 Ce modèle n'est pas régulier (pourquoi?).

On montre que (cf. TD1, exercice 1.2)

- ▶  $\hat{\theta}_n = \max_{i \leq n} X_i$  est l'EMV de  $\theta$ , et
- ▶  $n(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} -Z$  avec  $Z \sim \mathcal{E}\left(\lambda = \frac{1}{\theta}\right)$ .

Dans ce cas particulier,

- ⇒ l'EMV n'est pas asymptotiquement gaussien ;
- ⇒ la vitesse de convergence est  $\frac{1}{n}$  : plus rapide que  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

[retour au slide ??](#)

68/69



## La loi Rayleigh $\mathcal{R}(\sigma^2)$

Soit  $X \sim \mathcal{R}(\sigma^2)$  avec  $\sigma > 0$ . Sa densité est :

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

### Moments

- moyenne :  $\mathbb{E}_\sigma(X) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
- variance :  $\text{var}_\sigma(X) = \sigma^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$

### Propriété

si  $X \sim \mathcal{R}(\sigma^2)$  alors  $Y = X^2 \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)$ .

### Loi d'une somme de lois de Rayleigh

On définit (pour l'exercice) la loi suivante :

$$\text{Si } (X_1, \dots, X_n) \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{R}(\sigma^2), \text{ alors } Z = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{SR}(n, \sigma^2).$$