

Statistique et apprentissage

Chargés de cours (ordre alphabétique) :

Julien Bect, Gilles Faÿ, Ziad Kobeissi, Laurent Le Brusquet,
Vincent Lescarret, Arshak Minasyan, Arthur Tenenhaus[†] & Xujia Zhu

[†] Coordinateur du cours

1/42

Cours 4/9

Tests d'hypothèses

Objectifs du cours 4

- ▶ prendre une décision en posant un test d'hypothèse
- ▶ choisir et construire un test d'hypothèse
- ▶ définir et calculer les risques de première et deuxième espèce

2/42

Plan du cours

- 1 – Exemples et généralités
- 2 – Test paramétrique
- 3 – Tests d'adéquation : le test du χ^2 de Pearson
- 4 – Exercices types
- 5 – Annexes

3/42

Plan du cours

- 1 – Exemples et généralités
 - 1.1 – Deux exemples introductifs
 - 1.2 – Risques associés à un test
- 2 – Test paramétrique
- 3 – Tests d'adéquation : le test du χ^2 de Pearson
- 4 – Exercices types
- 5 – Annexes

Plan du cours

1 – Exemples et généralités

1.1 – Deux exemples introductifs

1.2 – Risques associés à un test

2 – Test paramétrique

3 – Tests d'adéquation : le test du χ^2 de Pearson

4 – Exercices types

5 – Annexes

Exemple « Fiabilité composant »

Rappel : $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(\theta)$, $\theta > 0$.

Problème posé

Le fabricant souhaite proposer à ses clients une garantie d'un an.

➡ Est-ce pertinent ?

Reformuler la question

Il estime qu'une garantie est envisageable si :

le taux de retour des composants est inférieur à 10%

\Updownarrow

$$\mathbb{P}_\theta(X_1 \leq 1) = 1 - \exp(-\theta) < 0.1$$

\Updownarrow

$$\theta < \theta_0 = -\ln(0.9)$$

Exemple « Fiabilité composant »

Le fabricant souhaite donc savoir si $\theta < \theta_0$ ou si $\theta \geq \theta_0$.

- ➡ **hypothèse à tester** : $H_0 : \theta \geq \theta_0$
(composants de qualité insuffisante)

Prendre une décision à l'aide des données

On souhaite évaluer la compatibilité entre H_0 et $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$:

- ▶ si une forte incompatibilité détectée,
 - ➡ on **rejettera** H_0 (et la garantie sera proposée) ;
- ▶ autrement, on **acceptera** H_0 .

Notez le déséquilibre entre les 2 scénarios
(H_0 = scénario conservé par défaut)

Les **tests d'hypothèses** permettent de formaliser cette prise de décision.

5/42

Autre exemple / construction d'un premier test

Objectif : **tester le paramètre de moyenne d'une loi gaussienne.**

- ▶ $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\theta, \sigma_0^2)$ (σ_0 connu ; $n = 10$, $\sigma_0 = 2.5$)
- ▶ hypothèse à tester $H_0 : \theta = \theta_0$ (fixé),
- ▶ hypothèse alternative $H_1 : \theta = \theta_1$ (fixé et tel que $\theta_0 < \theta_1$).

Démarche. Prendre une décision sur H_0 , c'est estimer qu'elle est

- ▶ soit vraie ➡ $\delta = 0$,
- ▶ soit fausse ➡ $\delta = 1$.

Contrainte. Prendre une décision δ tel que si $\theta = \theta_0$ (H_0 vraie),

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(\delta = 1) = 5\% (= \alpha).$$

Construction intuitive d'un test : $\delta = \mathbb{1}_{\bar{X} > t}$

- ▶ avec t tel que $\mathbb{P}_{\theta_0}(\delta = 1) = \mathbb{P}_{\theta_0}(\bar{X} > t) = 5\%$.

6/42

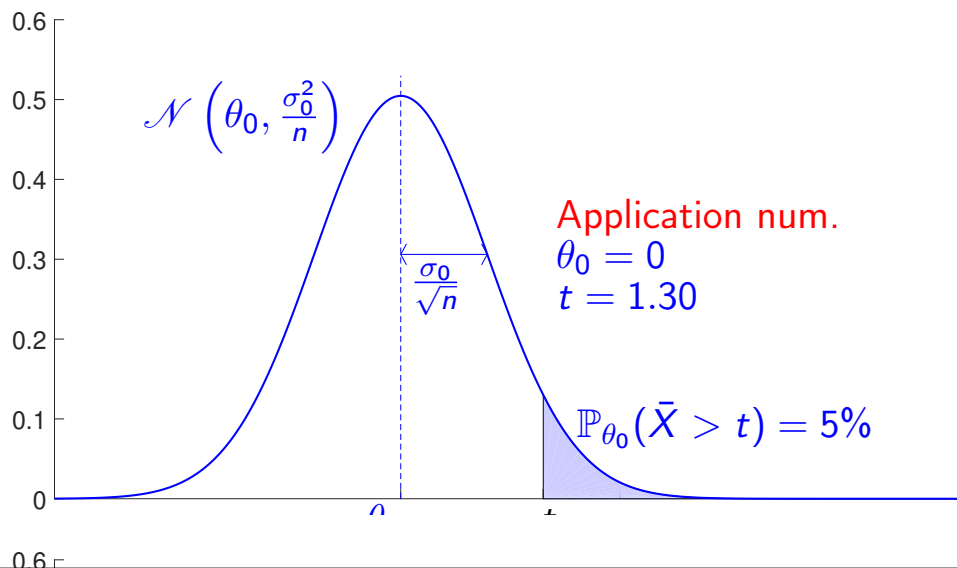
Si H_0 est vraie ($\theta = \theta_0$) H_1 est vraie ($\theta = \theta_1$) : $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\theta_0, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$, et ainsi :

$$t = \theta_0 + q_{0.95} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

avec q_r quantile d'ordre r de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

$$\mathbb{P}_{\theta_1}(\delta = 0) = \mathbb{P}_{\theta_1}(\bar{X} \leq t) = \Phi\left(\frac{t - \theta_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)$$

avec Φ fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.



7/42

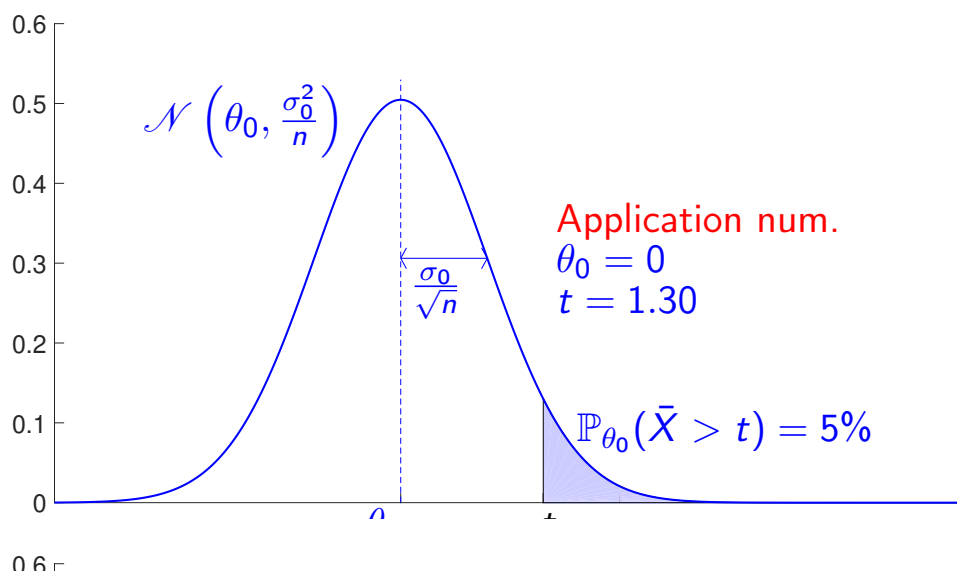
Si H_0 est vraie ($\theta = \theta_0$) H_1 est vraie ($\theta = \theta_1$) : $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\theta_0, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$, et ainsi :

$$t = \theta_0 + q_{0.95} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

avec q_r quantile d'ordre r de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

$$\mathbb{P}_{\theta_1}(\delta = 0) = \mathbb{P}_{\theta_1}(\bar{X} \leq t) = \Phi\left(\frac{t - \theta_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)$$

avec Φ fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.



8/42

Plan du cours

1 – Exemples et généralités

1.1 – Deux exemples introductifs

1.2 – Risques associés à un test

2 – Test paramétrique

3 – Tests d'adéquation : le test du χ^2 de Pearson

4 – Exercices types

5 – Annexes

Poser un test d'hypothèse

Rappel : on a un modèle statistique paramétré par θ :

$$\mathcal{P}^X = \left\{ \mathbb{P}_{\theta}^X, \theta \in \Theta \right\}.$$

Hypothèse statistique

Une **hypothèse statistique** est représentée par un sous-ensemble de \mathcal{P}^X , et donc par **un sous-ensemble de Θ** .

Notation. Soit $\Theta_j \subset \Theta$ le sous-ensemble représentant H_j

$$\implies H_j : \theta \in \Theta_j$$

Test paramétrique / non-paramétrique.

Un test est dit paramétrique si Θ est de dimension finie.

Poser un test d'hypothèse (suite)

Hypothèse nulle

On appelle **hypothèse nulle** l'hypothèse $H_0 : \theta \in \Theta_0$

- ▶ que l'on « veut tester »,
- ▶ celle qui sera **conservée par défaut** si elle n'est pas incohérente avec les données.

Analogie judiciaire : présomption d'innocence

Hypothèse alternative

On appelle **hypothèse alternative** l'hypothèse $H_1 : \theta \in \Theta_1$

- ▶ qui sera **choisie si H_0 est rejetée**.
- ▶ On suppose que $\Theta_1 \cap \Theta_0 = \emptyset$.

Remarque : on peut supposer sans perte de généralité que $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$.

10/42

Exemples de tests paramétriques

Exemple 1. Exercice

- ▶ $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(\theta)$, avec $\theta \in \Theta = [0, +\infty[$,
- ▶ $\Theta_0 = \{\theta \geq \theta_0\}$; $\Theta_1 = \{\theta < \theta_0\}$ avec $\theta_0 > 0$ un seuil fixé.

Exemple 2. Même exemple avec :

- ▶ $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ (**singleton**); $\Theta_1 = \{\theta \neq \theta_0\}$,
- ▶ ou $\Theta_0 = \{\theta_0\}$; $\Theta_1 = \{\theta < \theta_0\}$.

Définitions : hypothèses simples / composites

On dit qu'une hypothèse H_j est **simple** quand Θ_j est un singleton.
On dit que H_j est une **composite** dans le cas contraire.

11/42

Autres exemples de tests (non-paramétriques)

Tests d'adéquation à une loi ou une famille de lois

► [voir section 3](#)

Autres types de tests

- tests pour l'indépendance de deux (groupes de) variables
- tests de la symétrie d'une loi
- ...

12/42

Procédure de test

Définition : (procédure de) test

Un **test** est une statistique $\delta = \delta(\underline{X})$ valeurs dans $\{0, 1\}$:

$$\begin{aligned} \delta : \underline{\mathcal{X}} &\mapsto \{0, 1\}, \\ \underline{x} &\rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } H_0 \text{ est acceptée,} \\ 1 & \text{si elle est rejetée (en faveur de } H_1). \end{cases} \end{aligned}$$

Définition : zone de rejet d'un test

La **zone de rejet** \mathcal{R}_δ d'un test δ est

$$\mathcal{R}_\delta = \{ \underline{x} \in \underline{\mathcal{X}} \text{ tel que } \delta(\underline{x}) = 1 \}.$$

13/42

Quantifier les risques d'erreur

Définition : risque (d'erreur) de première espèce

On appelle **risque de première espèce** la probabilité de l'erreur consistant à rejeter H_0 à tort :

$$\mathbb{P}_\theta(\delta = 1) = \mathbb{E}_\theta(\delta), \quad \theta \in \Theta_0.$$

(\triangle Ce risque dépend de la valeur de θ , pour $\theta \in \Theta_0$.)

Définition : risque (d'erreur) de deuxième espèce

On appelle **risque de deuxième espèce** la probabilité de l'erreur consistant à accepter H_0 à tort :

$$\mathbb{P}_\theta(\delta = 0) = 1 - \mathbb{E}_\theta(\delta), \quad \theta \in \Theta_1.$$

(Notez le déséquilibre de la terminologie
→ plus grande importance accordée à H_0 .)

14/42

Définition : puissance d'un test

On appelle **puissance** la proba. de rejeter H_0 lorsqu'elle est fausse :

$$\mathbb{P}_\theta(\delta = 1) = \mathbb{E}_\theta(\delta), \quad \theta \in \Theta_1.$$

Remarque : égale à « 1 - risque de deuxième espèce ».

Approche usuelle[†] pour la construction d'un test.

Soit $0 < \alpha < 1$ un niveau de risque. On va chercher un test δ t.q.

- ▶ $\forall \theta \in \Theta_0, \mathbb{P}_\theta(\delta = 1) \leq \alpha$;
 - ⇒ contrôle du risque de première espèce.
- On dit que le test δ est **de niveau (au plus) α** .
- ▶ $\forall \theta \in \Theta_1, \mathbb{P}_\theta(\delta = 1)$ « le plus grand possible » ;
 - ⇒ capacité à remettre en cause H_0 lorsqu'elle est fausse.

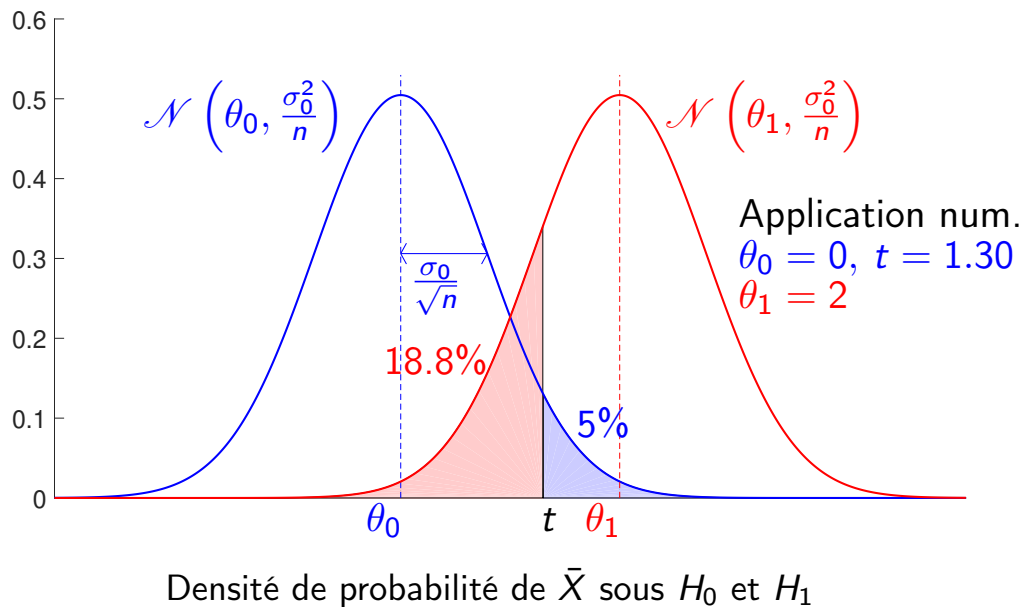
Valeurs typiques : $\alpha = 5\%, 1\%, 1\% \dots$

[†] « de Neyman »

15/42

Retour sur l'exemple introductif

- risque de première espèce : aire de la zone **bleue**,
- risque de deuxième espèce : aire de la zone **rouge**.



16/42

Définition : taille d'un test

On dit que δ est **de niveau exactement α** , ou de **taille α** , si

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta(\delta = 1) = \alpha.$$

Définition : comparaison de deux tests

Soient δ et δ' deux tests de niveau (au plus) α . On dit que δ' est **uniformément plus puissant** que δ si

$$\forall \theta \in \Theta_1, \quad \mathbb{P}_\theta(\delta' = 1) \geq \mathbb{P}_\theta(\delta = 1).$$

(Certains auteurs demandent une inégalité stricte en un ou tous les $\theta \in \Theta_1$.)

Remarques :

- il s'agit d'un **ordre partiel** sur les fonctions puissance,
- lorsque c'est possible, on cherchera le **test uniformément le plus puissant (UPP) au niveau α** (c'est-à-dire un test de niveau α , uniformément plus puissant que tout autre test de niveau α).

17/42

Plan du cours

1 – Exemples et généralités

2 – Test paramétrique

2.1 – Hypothèse simple / hypothèse simple

2.2 – Hypothèse composite

2.3 – Tests asymptotiques

3 – Tests d'adéquation : le test du χ^2 de Pearson

4 – Exercices types

5 – Annexes

Plan du cours

1 – Exemples et généralités

2 – Test paramétrique

2.1 – Hypothèse simple / hypothèse simple

2.2 – Hypothèse composite

2.3 – Tests asymptotiques

3 – Tests d'adéquation : le test du χ^2 de Pearson

4 – Exercices types

5 – Annexes

Test du rapport de vraisemblance

Supposons **deux hypothèses simples** : $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ et $\Theta_1 = \{\theta_1\}$.

On note $\mathcal{L} : (\theta, \underline{x}) \mapsto \mathcal{L}(\theta, \underline{x})$ la **fonction de vraisemblance**[†].

Définition : test du rapport de vraisemblance

On appelle **test du rapport de vraisemblance** (RV) le test

$$\delta^{\text{RV}} = \begin{cases} 1 & \text{si } T^{\text{RV}} > c, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

construit à partir de la **statistique du rapport de vraisemblance** :

$$T^{\text{RV}} = \frac{\mathcal{L}(\theta_1, \underline{X})}{\mathcal{L}(\theta_0, \underline{X})}.$$

[†] On peut montrer que la famille finie $\{\mathbb{P}_{\theta_0}^X, \mathbb{P}_{\theta_1}^X\}$ est toujours dominée (Radon-Nikodym).

Résultat fondamental

Soit $\alpha \in]0, 1[$.

Théorème : « lemme » de Neyman-Pearson

Supposons qu'il **existe**[⊗] un **seuil** $c = c_\alpha$ tel que

- ▶ le test du RV associé δ^{RV} soit de **niveau exactement** α (de taille α).

Alors δ^{RV} est le test **le plus puissant**[†] au niveau α :

- ▶ pour tout test $\tilde{\delta}$ de niveau (au plus) α , δ^{RV} est plus puissant que $\tilde{\delta}$.

⇒ Le test du RV est **optimal** dans cette situation.

[⊗] Toujours vrai si la fonction de repartition de T^{RV} est continue.

[†] Inutile de préciser « uniformément » puisque H_1 est simple.

Retour sur l'exemple gaussien

Rapport de vraisemblance :

$$\begin{aligned} T^{\text{RV}} &= \frac{\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_0)^n} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \theta_1)^2}{2\sigma_0^2}\right)}{\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_0)^n} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \theta_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)} \\ &= \exp\left(-\frac{n(\theta_1^2 - \theta_0^2)}{2\sigma_0^2}\right) \exp\left(\frac{(\theta_1 - \theta_0)}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n X_i\right). \end{aligned}$$

Test du RV au niveau α : puisque $\theta_1 > \theta_0$, on a

$$\delta^{\text{RV}} = 1 \iff T^{\text{RV}} > c_\alpha \iff T = \bar{X} > t_\alpha$$

⇒ le test construit en introduction est optimal.

20/42

Statistique de test et p-valeur

Le résultat d'un test peut être exprimé à l'aide de sa **p-valeur**.

Définition : p-valeur

Soit T la statistique de test d'un test de la forme $\delta = \mathbb{1}_{T > t_\alpha}$.

Définition. On appelle **p-valeur** la **statistique**

$$\text{pval}(\underline{x}) = \mathbb{P}_{\theta_0}(T(\underline{X}) > T(\underline{x}))$$

à valeurs dans $]0, 1[$.

⚠ Fonction des observations !

Soit F_0 la FR de T sous H_0 . Alors :

$$\text{pval}(\underline{x}) = 1 - F_0(T(\underline{x})).$$

21/42

Interprétation de la p-valeur

Supposons F_0 continue et strictement croissante :

$\forall \alpha \in]0, 1[, \quad \exists ! t_\alpha \in \mathbb{R}, \quad \delta = \mathbb{1}_{T > t_\alpha}$ est de niveau exactement α .

Proposition

► Démonstration

H_0 est rejetée au niveau $\alpha \Leftrightarrow T > t_\alpha \Leftrightarrow \text{pval} < \alpha$.

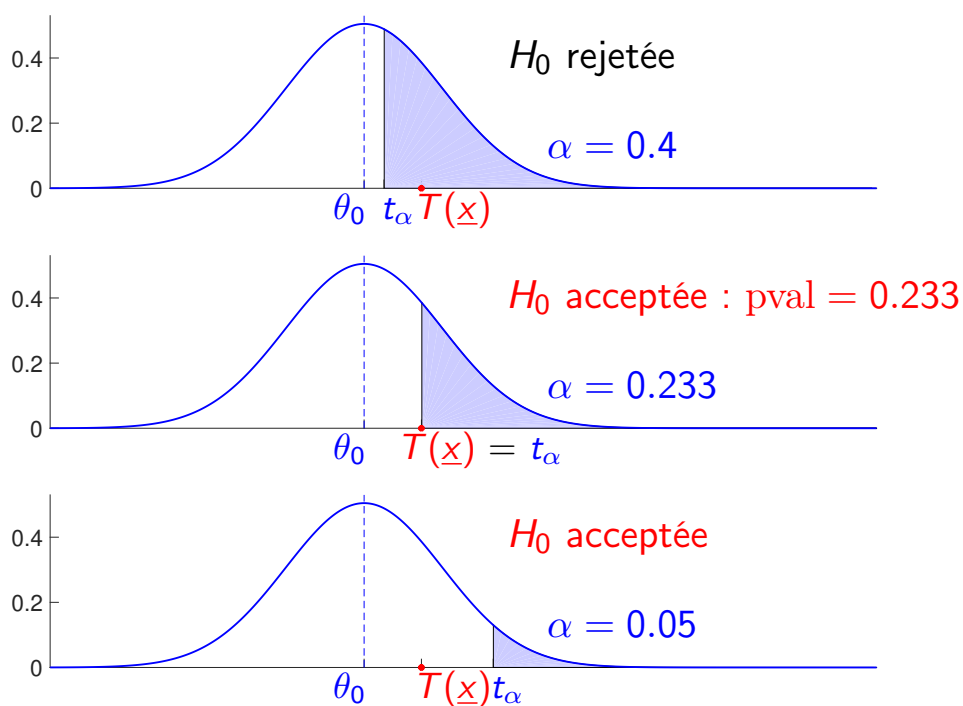
t_α est appelé **valeur critique** de la statistique de test T .

Interprétation : p-valeur = mesure de la présomption contre H_0

p-valeur	présomption contre H_0
$\text{pval} < 0.01$	très forte présomption
$0.01 \leq \text{pval} < 0.05$	forte présomption
$0.05 \leq \text{pval} < 0.10$	faible présomption
$0.1 < \text{pval}$	aucune présomption

22/42

Retour sur l'exemple gaussien, où $T(\underline{X}) = \bar{X}$



pval est le **plus grand niveau α** auquel on accepte H_0 .

23/42

Plan du cours

1 – Exemples et généralités

2 – Test paramétrique

2.1 – Hypothèse simple / hypothèse simple

2.2 – Hypothèse composite

2.3 – Tests asymptotiques

3 – Tests d'adéquation : le test du χ^2 de Pearson

4 – Exercices types

5 – Annexes

Exemples de tests avec des hypothèses composites

Hypothèse nulle simple / alternative composite

- ▶ $\Theta_0 = \{\theta_0\} / \Theta_1 = \{\theta > \theta_0\}$ (test unilatéral),
- ▶ $\Theta_0 = \{\theta_0\} / \Theta_1 = \{\theta \neq \theta_0\}$ (test bilatéral),
- ▶ ...

Hypothèse nulle composite / alternative composite

- ▶ $\Theta_0 = \{\theta \leq \theta_0\} / \Theta_1 = \{\theta > \theta_0\}$ (test unilatéral),
- ▶ $\Theta_0 = \{\mu = \mu_0\} / \Theta_1 = \{\mu = \mu_1\}$,
où $\theta = (\mu, \sigma^2)$ avec σ^2 inconnu (paramètre de nuisance),
- ▶ $\Theta_0 = \{\theta^{(1)} = \theta^{(2)}\} / \Theta_1 = \{\theta^{(1)} \neq \theta^{(2)}\}$,
où $\theta \in \Theta = \mathbb{R}^2$ (égalité entre deux paramètres),
- ▶ ...

Différences avec le cas d'hypothèses simples

- Test de niveau (au plus) α , si Θ_0 est composite :

$$\forall \theta \in \Theta_0, \mathbb{P}_\theta(\delta = 1) \leq \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta(\delta = 1)}_{\text{taille du test}} \leq \alpha.$$

- Si Θ_1 est composite, la **puissance** est une fonction de $\theta \in \Theta_1$:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &\rightarrow [0, 1] \\ \theta &\mapsto \mathbb{P}_\theta(\delta = 1). \end{aligned}$$

- **p-valeur** pour un test de la forme $\delta = \mathbb{1}_{T > t_\alpha}$:

$$\text{pval} = \sup_{\theta \in \Theta_0} (1 - F_\theta(T)).$$

où F_θ est la fonction de répartition de T sous \mathbb{P}_θ .

25/42

Retour sur l'exemple gaussien / test sur la moyenne

- **Test sur hypothèses simples**

$$H_0 : \theta = \theta_0 / H_1 : \theta = \theta_1, \quad \text{avec } \theta_0 < \theta_1$$

- **Rappel du test optimal.**

$$\delta(\underline{X}) = 1 \iff \bar{X} > t_\alpha, \quad \text{avec } t_\alpha = \theta_0 + q_{1-\alpha} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

Par Neyman-Pearson δ est **UPP** parmi les tests de niveau α .

- **Analyse du test.** δ est identique $\forall \theta_1 > \theta_0$ (δ ne dépend que de α et θ_0) ; donc δ est aussi UPP pour un test de la forme :

$$H_0 : \theta = \theta_0 / H_1 : \theta > \theta_0.$$

On peut montrer que δ est aussi **UPP** pour un test de la forme : $H_0 : \theta \leq \theta_0 / H_1 : \theta > \theta_0$

Plan du cours

1 – Exemples et généralités

2 – Test paramétrique

2.1 – Hypothèse simple / hypothèse simple

2.2 – Hypothèse composite

2.3 – Tests asymptotiques

3 – Tests d'adéquation : le test du χ^2 de Pearson

4 – Exercices types

5 – Annexes

Contexte : $X_1, X_2, \dots \stackrel{\text{iid}}{\sim} P_\theta$

Lorsque déterminer la loi de $T_n(\underline{X}_n)$ est complexe

▮▮▮▮ recours à la loi limite pour $n \rightarrow \infty$.

Exemple « Fiabilité composant »

$$\mathcal{R}_{\alpha,n} = \{\underline{x}_n \text{ tel que } T_n(\underline{x}_n) = \bar{x}_n > \tilde{t}_{\alpha,n}\}.$$

avec $\tilde{t}_{\alpha,n}$ choisi de sorte que :

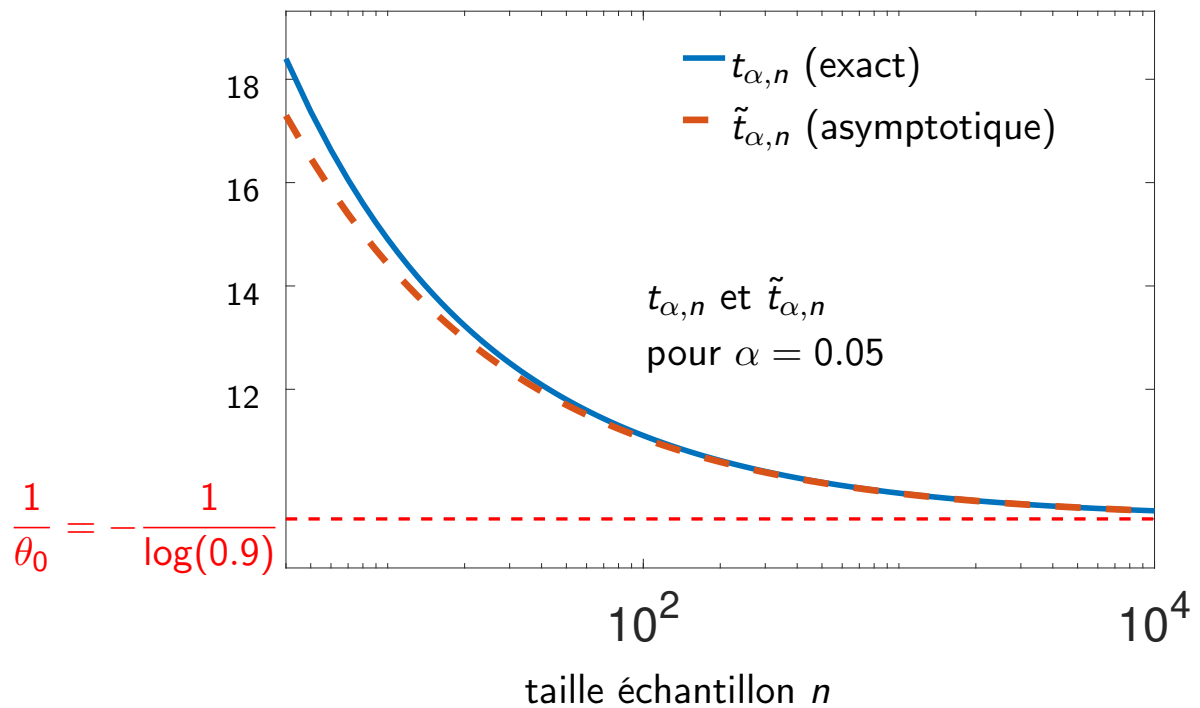
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\theta_0} (T_n(\underline{X}_n) > \tilde{t}_{\alpha,n}) = \alpha.$$

Par le TCL on a sous H_0 : $\sqrt{n} \left(\bar{X}_n - \frac{1}{\theta_0} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N} \left(0, \frac{1}{\theta_0^2} \right)$, donc

$$\tilde{t}_{\alpha,n} = \frac{1}{\theta_0} + \frac{1}{\theta_0 \sqrt{n}} q_{1-\alpha}$$

avec $q_{1-\alpha}$ le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Application « Fiabilité composant »



28/42

Plan du cours

- 1 – Exemples et généralités
- 2 – Test paramétrique
- 3 – Tests d'adéquation : le test du χ^2 de Pearson
- 4 – Exercices types
- 5 – Annexes

Test d'adéquation à une loi donnée

Contexte : $X_1, X_2, \dots \stackrel{\text{iid}}{\sim} P$ avec P **inconnue**, quelconque
 $\Rightarrow \theta = P, \quad \Theta = \{ \text{lois de probabilité sur } (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \}.$

Hypothèses statistiques testées

Pour une loi P_0 donnée, on considère les hypothèses :

$$H_0 : P = P_0$$

$$H_1 : P \neq P_0$$

Exemple « Fiabilité composant » :

- ▶ Le fabricant de composants sait, de par des analyses passées, que les durées de vie devraient suivre une loi $\mathcal{E}(\theta_0)$.
- ▶ Pour vérifier le bon fonctionnement de la chaîne, il veut tester si $H_0 : P = \mathcal{E}(\theta_0)$ est toujours vraie.

[retour au slide 12](#)

29/42

Statistique de test du χ^2

Soient (A_1, \dots, A_K) une partition du support de P_0 , et

- ▶ $N = (N_1, \dots, N_K)$ avec
 $N_k = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_k}(X_i) \rightarrow$ effectifs observés,
- ▶ $p = (p_1, \dots, p_K)$ avec
 $p_k = P_0(X_1 \in A_k) \rightarrow np_k =$ effectifs moyens sous H_0 .

Proposition

Sous l'hypothèse H_0 , N suit une loi **multinomiale** $\text{Multi}(n, p)$ et

$$T_n = \sum_{k=1}^K \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \chi^2(K-1).$$

(loi du χ^2 à $K-1$ degrés de liberté)

[Complément : la loi multinomiale](#)

[Complément : la loi du \$\chi^2\$](#)

30/42

Test du χ^2

Rappel. On veut tester $H_0 : P = P_0$ contre $H_1 : P \neq P_0$.

Test d'adéquation du χ^2

Soit $0 < \alpha < 1$ et soit T la statistique de test

$$T = \sum_{k=1}^K \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k}.$$

Alors le test du χ^2 s'écrit

$$\delta = \mathbb{1}_{T > t_\alpha},$$

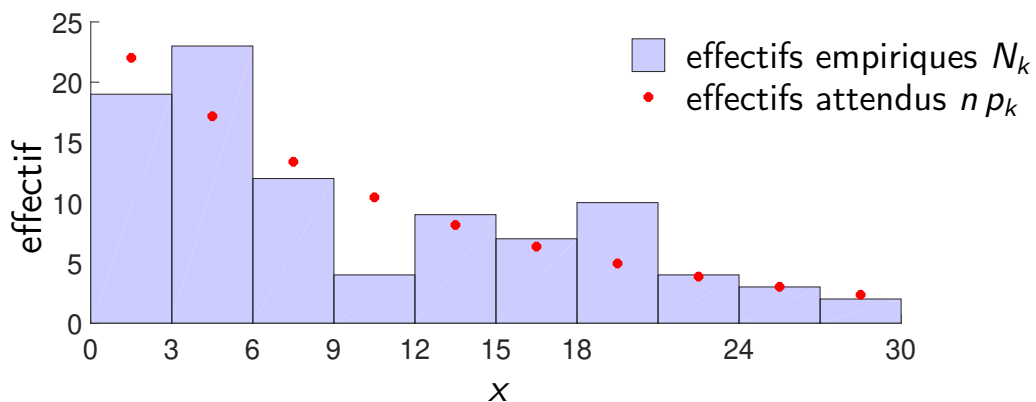
avec t_α quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi $\chi^2(K - 1)$.



Condition d'application : choisir A_1, \dots, A_K tel que $np_k \geq 5, \forall k$.

31/42

Le test d'adéquation du χ^2 : « Fiabilité composant »



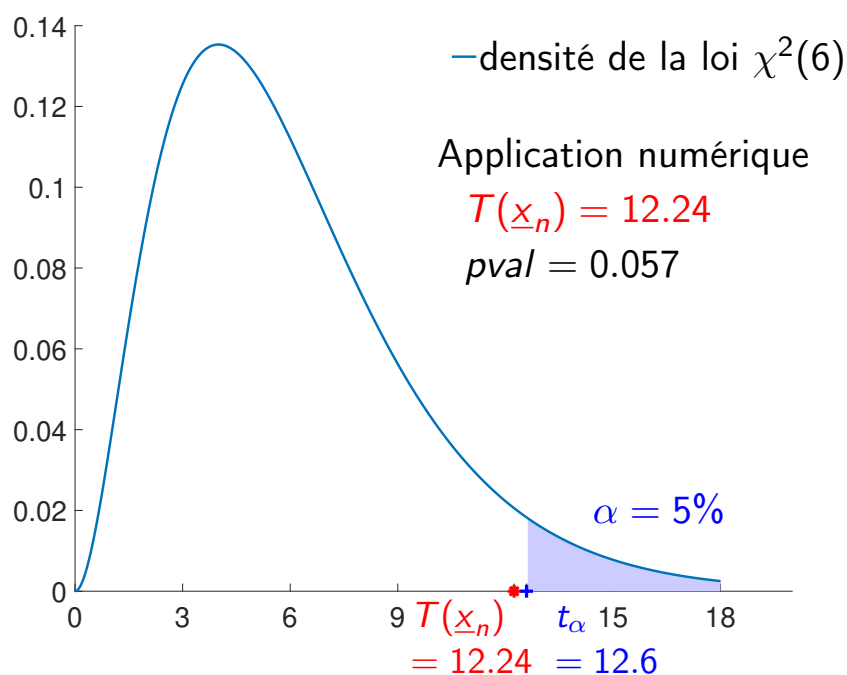
classe	$[0, 3[$	$[3, 6[$	$[6, 9[$	$[9, 12[$	$[12, 15[$	$[15, 18[$	$[18, \infty[$
N_k	19	23	12	4	9	7	19
np_k	25.90	19.2	14.2	10.5	7.8	5.8	11.6

$$T(\underline{X}_n) = \sum_{k=1}^7 \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \chi^2(7 - 1)$$

32/42

Le test d'adéquation du χ^2 : « Fiabilité composant »

Application numérique. $n = 100$, $T(\underline{x}_n) = 12.24$



➡ pour un niveau à 5%, H_0 est acceptée

33/42

Pour aller plus loin...

- ▶ Test du χ^2 pour l'**adéquation à une famille de lois**
 - ▶ extension du test présenté au cas où il y a des paramètres à estimer sous H_0

➡ complément

- ▶ **Test de Kolmogorov-Smirnov**
 - ▶ un autre test, fondé sur la **fonction de répartition**,
 - ▶ et ne nécessitant pas le choix d'une partition

➡ complément

34/42

Plan du cours

1 – Exemples et généralités

2 – Test paramétrique

3 – Tests d'adéquation : le test du χ^2 de Pearson

4 – Exercices types

4.1 – Énoncés

4.2 – Corrigés

5 – Annexes

Plan du cours

1 – Exemples et généralités

2 – Test paramétrique

3 – Tests d'adéquation : le test du χ^2 de Pearson

4 – Exercices types

4.1 – Énoncés

4.2 – Corrigés

5 – Annexes

Exercice 1 (Test d'une proportion)

corrigé

Dans le cadre d'un jeu de pile ou face on souhaite tester si une pièce est équilibrée.

Questions

- i Proposer une expérience permettant de tester cette hypothèse. Préciser le modèle statistique sous-jacent et définir les hypothèses nulle et alternative.
- ii Proposer un test asymptotique de niveau α .

35/42

Exercice 2 (Test sur la fiabilité d'un composant)

corrigé

Un constructeur souhaite proposer à ses clients une garantie sur des ampoules. On suppose que la durée de vie d'une ampoule suit loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$.

Questions

Proposer un test UPP pour le test suivant :

$$H_0 : \Theta_0 = \{\theta \geq \theta_0\} \quad (\text{ampoule insuffisamment fiable})$$

$$H_1 : \Theta_1 = \{\theta < \theta_0\} \quad (\text{ampoule suffisamment fiable})$$

avec $\theta_0 > 0$ un seuil fixé.

retour au slide 11

retour au slide 26

36/42

Plan du cours

1 – Exemples et généralités

2 – Test paramétrique

3 – Tests d'adéquation : le test du χ^2 de Pearson


4 – Exercices types

4.1 – Énoncés

4.2 – Corrigés

5 – Annexes

Corrigé de l'exercice 1

 retour au sujet

i) on réalise n expériences de "pile ou face" dont les issues sont modélisées par n variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de $Ber(\theta)$.

On veut tester si

$$H_0 : \theta = \frac{1}{2}, \text{ c'est-à-dire } \Theta_0 = \left\{ \frac{1}{2} \right\} \text{ (hypothèse simple),}$$

vs.

$$H_1 : \theta \neq \frac{1}{2} \text{ donc } \Theta_1 = \left] 0, \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}, 1 \right[\text{ (hypothèse bilatérale).}$$

ii) Posons $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$, la moyenne empirique de l'échantillon. Par application directe du TCL, il vient que :

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)/n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Pour construire un test asymptotique bilatéral de niveau α , on se place sous H_0 . Il vient la convergence en loi suivante :

$$2\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_n - \frac{1}{2} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1).$$

On considère une zone de rejet de la forme : $2\sqrt{n}|\hat{\theta}_n - \frac{1}{2}| > c_\alpha$.
où c_α est choisi en fixant le risque de première espèce à α .

ii) Soit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(2\sqrt{n} \left| \hat{\theta}_n - \frac{1}{2} \right| > c_\alpha \right) = \alpha.$$

On en déduit que $c_\alpha = q_{1-\frac{\alpha}{2}}$, quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ d'une $\mathcal{N}(0, 1)$.

On rejette l'hypothèse H_0 au profit de H_1 au niveau α dès que :

$$\left| \hat{\theta}_n - \frac{1}{2} \right| > q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Ainsi l'écart entre $\hat{\theta}_n$ et $1/2$ est considéré comme significatif au niveau α dès qu'il est supérieur à $q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Soient $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(\theta)$

$H_0 : \Theta_0 = \{\theta \geq \theta_0\}$ (composant insuffisamment fiable)

$H_1 : \Theta_1 = \{\theta < \theta_0\}$ (composant suffisamment fiable)

Par Neyman-Pearson, le **test du RV** est UPP pour

$$H_0 : \Theta_0 = \{\theta_0\} \quad / \quad H_1 : \Theta_1 = \{\theta_1\}, \quad \text{avec } \theta_1 < \theta_0$$

$$\begin{aligned} T^{\text{RV}}(\underline{X}) &= \frac{\theta_1^n \exp(-\theta_1 \sum_{i=1}^n X_i)}{\theta_0^n \exp(-\theta_0 \sum_{i=1}^n X_i)} \\ &= \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n \exp((\theta_0 - \theta_1) \sum_{i=1}^n X_i) \end{aligned}$$

On définit alors la **zone de rejet** de ce test au niveau α :

$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{ \underline{x} \mid T^{\text{RV}}(\underline{x}) > t_\alpha^{\text{RV}} \right\} = \left\{ \underline{x} \mid T(\underline{x}) = \bar{x} > t_\alpha \right\}.$$

Rappel : si $\theta = \theta_0$, alors $\theta_0 \bar{X} \sim \Gamma(p = n, \lambda = n)$.

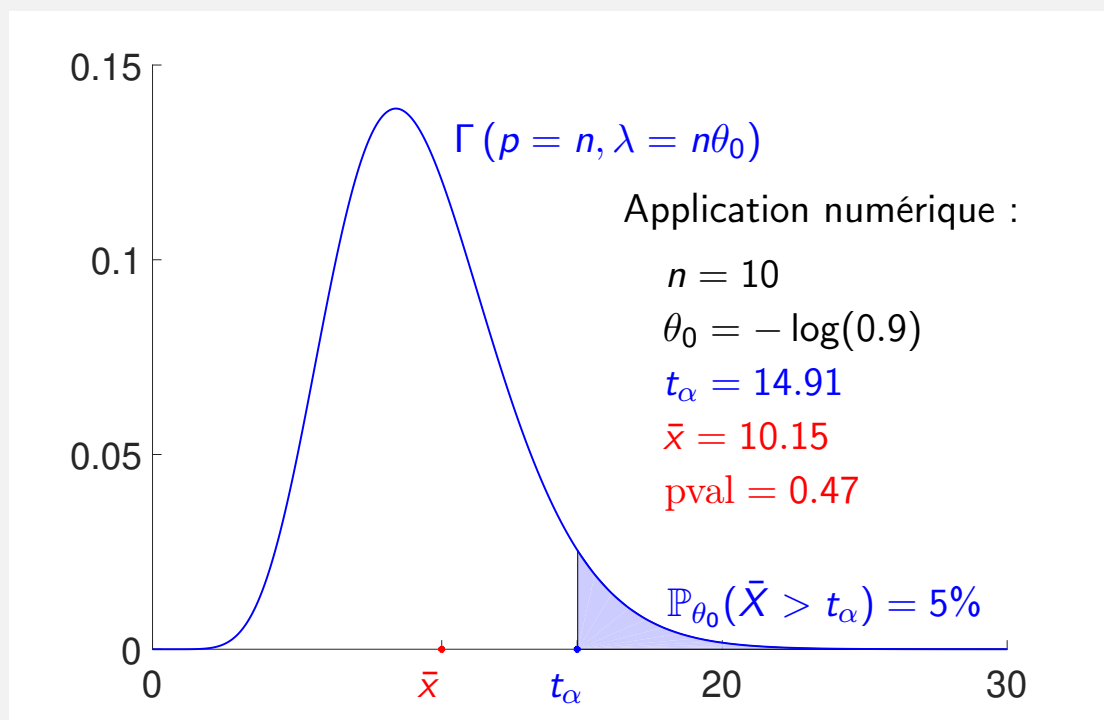
$$\Rightarrow t_{\alpha,n} = \frac{1}{\theta_0} q_{1-\alpha}$$

où q_r est le quantile d'ordre r de la loi $\Gamma(p = n, \lambda = n)$.

Ce test est aussi UPP pour sa version composite, en effet :

- ▶ le test du rapport de vraisemblance est **identique** $\forall \theta_1 < \theta_0$,
- ▶ la fonction $\theta \mapsto \mathbb{P}_\theta(\delta = 1)$ est strictement \searrow .

Bilan. On a construit un test **UPP au niveau α** .



- ➡ pour un niveau à 5%, H_0 n'est pas rejetée
- ➡ par précaution, le fabricant ne proposera pas de garantie.

Plan du cours

- 1 – Exemples et généralités
- 2 – Test paramétrique
- 3 – Tests d'adéquation : le test du χ^2 de Pearson
- 4 – Exercices types
- 5 – Annexes
 - 5.1 – Démonstration & compléments

Plan du cours

1 – Exemples et généralités

2 – Test paramétrique

3 – Tests d'adéquation : le test du χ^2 de Pearson

4 – Exercices types

5 – Annexes

5.1 – Démonstration & compléments

Démonstration

Observons que t_α vérifie par construction

$$F_0(t_\alpha) = 1 - \alpha.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\delta = 1 & \Leftrightarrow T > t_\alpha \\ & \Leftrightarrow F_0(T) > F_0(t_\alpha) = 1 - \alpha \\ & \Leftrightarrow \text{pval} < \alpha\end{aligned}$$



retour au slide ??

Test du rapport de vraisemblance généralisé

Il permet de construire un test lorsque Θ_0 et/ou Θ_1 sont/est composites.

- ▶ Statistique de test :

$$T(\underline{X}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_1} \mathcal{L}(\theta; \underline{X})}{\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathcal{L}(\theta; \underline{X})}.$$

- ▶ Le test n'est pas, en général, uniformément le plus puissant (UPP) au niveau α .

Quelques mots sur la loi multinomiale $Multi(n, p)$

Paramètres de la loi

- ▶ n entier ≥ 1 ,
- ▶ K entier ≥ 2 et $p \in (\mathbb{R}_+^+)^K$ tel que $\sum_{k=1}^K p_k = 1$.

Soient n_1, \dots, n_K entiers ≥ 0 tel que $\sum_{k=1}^K n_k = n$:

Si $N \sim Multi(n, p)$, $\mathbb{P}(N_1 = n_1, \dots, N_K = n_K) = \frac{n!}{n_1! \dots n_K!} p_1^{n_1} \dots p_K^{n_K}$

Moments

- ▶ moyenne : $\mathbb{E}_p(N) = np$
- ▶ matrice de covariance : $\text{cov}_p(N_i, N_j) = n(p_i \delta_{ij} - p_i p_j)$

Loi marginales

- ▶ Les lois marginales sont binomiales : $N_j \sim \text{Bin}(n, p_j)$.

Quelques mots sur la loi du $\chi^2(q)$

Paramètre de la loi

- q entier ≥ 1 : nombre de degrés de liberté.

Définition. Si $Y_1, \dots, Y_q \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ alors

$$T = \sum_{k=1}^q Y_k^2 \sim \chi^2(q)$$

La loi du χ^2 est un **cas particulier de la loi Γ** :

$$\chi^2(q) = \Gamma\left(p = \frac{q}{2}, \lambda = \frac{1}{2}\right)$$

► Les propriétés de la loi du χ^2 découlent de celles de la loi Γ .

Moyenne

- $\mathbb{E}_q(T) = q$

Variance

- $\text{var}_q(T) = 2q$

► retour au slide ??

Le test d'adéquation du χ^2 avec estimation de paramètres

La durée de vie d'un composant suit-elle une loi exponentielle ?

► **Hypothèse H_0 :** $\exists \theta > 0, P = P_\theta = \mathcal{E}(\theta)$.

Démarche

- 1 Construction d'un estimateur consistant de $\theta \rightarrow \hat{\theta}$.
- 2 Test d'adéquation à la loi $P_{\hat{\theta}}$.

Mise en œuvre

$$\hat{p}_k = P_{\hat{\theta}}(X_1 \in A_k)$$

$$T(\underline{X}_n) = \sum_{k=1}^K \frac{(N_k - n\hat{p}_k)^2}{n\hat{p}_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \chi^2(K - 1 - q) \text{ avec } q = \text{card}(\theta)$$

Rejet de H_0 si $T(\underline{x}_n) > t_{1-\alpha}$ ($t_{1-\alpha}$ quantile d'ordre $1 - \alpha$ d'une $\chi^2(K - 1 - q)$).

► retour au slide 34

Le test de Kolmogorov-Smirnov

Test d'adéquation à une loi fixée : $H_0 : P = P_0$.

Distance de Kolmogorov-Smirnov

On appelle **distance de Kolmogorov-Smirnov** la quantité

$$D_n = \sup_x \left| \hat{F}_n(x) - F_0(x) \right|,$$

avec F_0 la FR de P_0 et \hat{F}_n la FR **empirique** : $\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}$.

Test de Kolmogorov-Smirnov, de niveau asymptotique α

Sous hypothèse H_0 , si F_0 est continue :

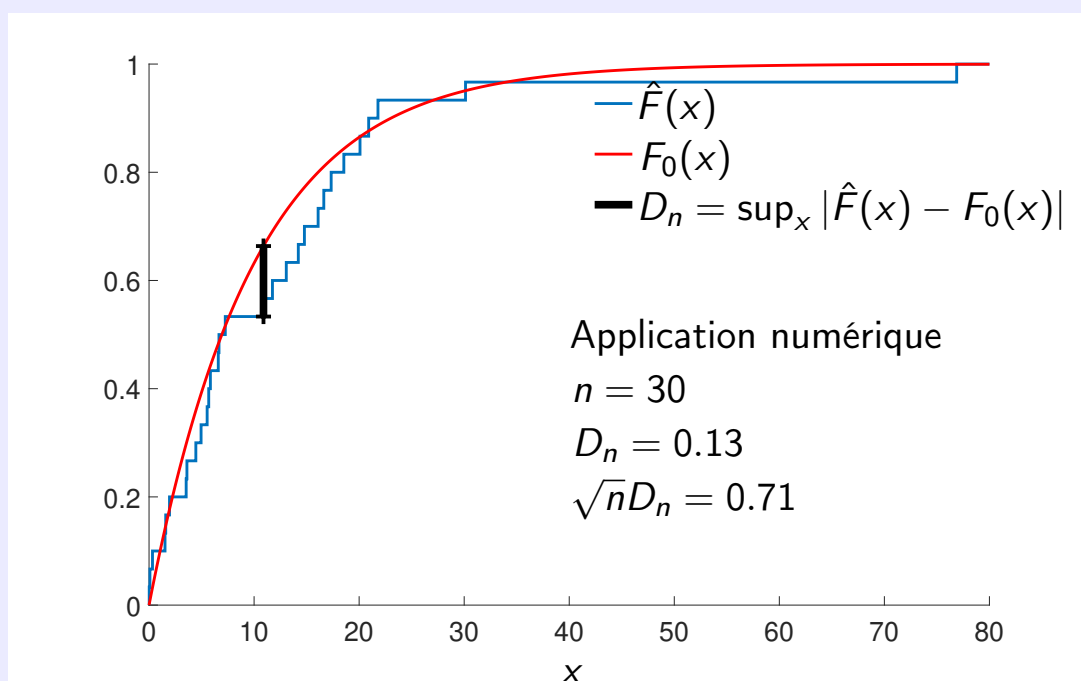
$$T(\underline{X}_n) = \sqrt{n} D_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{K},$$

où \mathcal{K} est la loi de Kolmogorov-Smirnov.

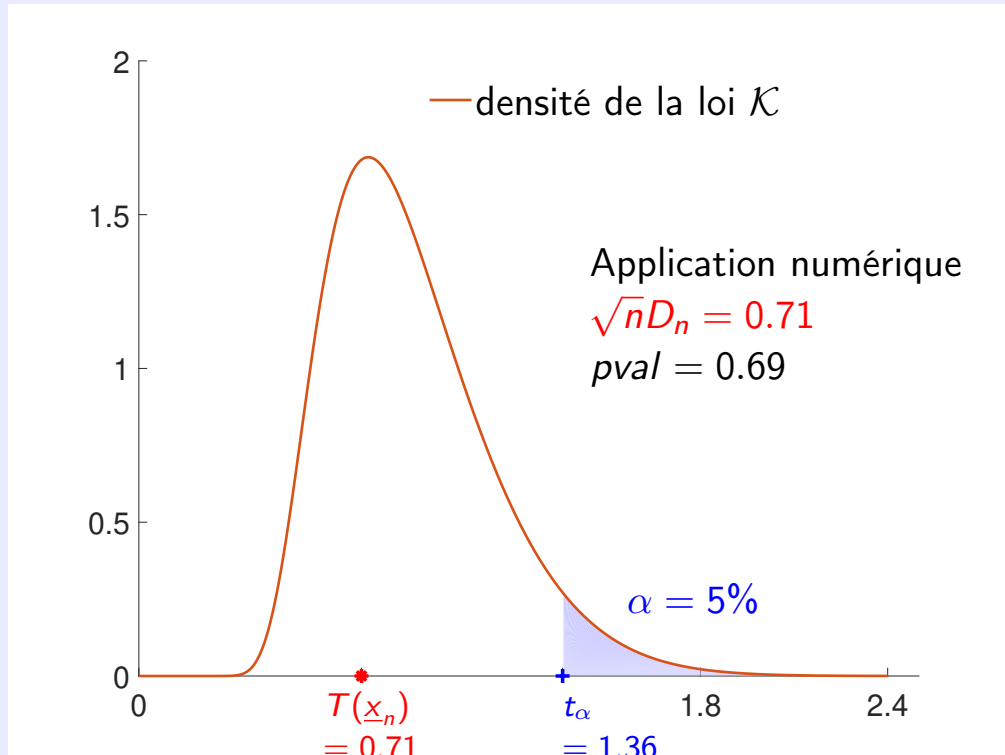
⇒ on rejette H_0 si $T(\underline{x}_n) > t_\alpha$ (avec t_α quantile de la loi \mathcal{K})

Le test de Kolmogorov-Smirnov

« Fiabilité composant » : $H_0 : P = \mathcal{E}(\theta_0)$ avec $\theta_0 = 0.1$



Le test de Kolmogorov-Smirnov



➡ pour un niveau à 5%, H_0 est acceptée

➡ retour au slide 34